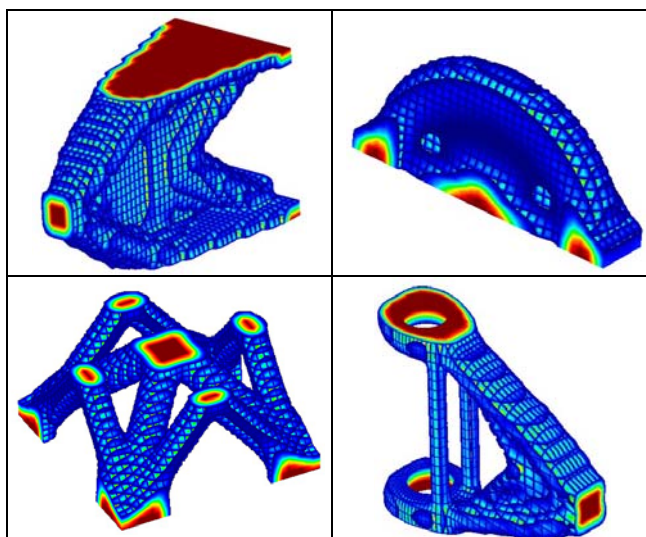




**Marco Filipe Esteves  
Fernandes**

**Optimização topológica multi-objectivo de estruturas  
lineares elásticas tridimensionais**





**Marco Filipe Esteves  
Fernandes**

**Optimização topológica multi-objectivo de estruturas  
lineares elásticas tridimensionais**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor António Gil d'Orey de Andrade Campos, Professor Auxiliar Convidado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho à minha esposa pelo incansável apoio e a meus filhos por inspirarem-me a ser uma pessoa melhor todos os dias.

## **o júri**

presidente

**Professor Doutor Alfredo Balacó de Moraes**  
Professor Associado da Universidade de Aveiro

**Professor Doutor Rogério Pereira Leal**  
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

**Professor Doutor Filipe Miguel Horta e Vale Teixeira-Dias**  
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

**Professor Doutor António Gil d'Orey de Andrade Campos**  
Professor Auxiliar Convidado da Universidade de Aveiro

## **agradecimentos**

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. António Gil d'Orey de Andrade Campos, por partilhar o seu conhecimento científico, pelo estímulo, amizade e extraordinária disponibilidade para me ensinar ao longo destes meses de trabalho; a ele muito obrigado.

Ao Prof. Dr. Filipe Miguel Horta e Vale Teixeira-Dias pela disponibilidade para orientar temas e ceder bibliografia.

Ao meu filho André Filipe pela motivação para continuar sempre, mesmo nas horas difíceis.

À minha esposa Natália, por tudo...

Um agradecimento especial à minha família, e principalmente aos meus pais, porque se cheguei até aqui foi graças a eles.

Um obrigado a todos os que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

## **palavras-chave**

Optimização estrutural, optimização topológica, elementos finitos, elasticidade, energia de deformação.

## **resumo**

O processo de optimização estrutural consiste em obter o projecto de melhor desempenho, que é avaliado através de uma função objectivo definida a partir de um conjunto de variáveis que descrevem o sistema estrutural, denominadas variáveis de projecto. No caso da optimização topológica, isto é realizado através da variação do domínio (topologia) da estrutura.

Em geral, os métodos de optimização topológica são baseados na análise da sensibilidade da função objectivo e das restrições impostas ao problema.

Neste trabalho utiliza-se um modelo computacional para a determinação da topologia óptima de estruturas lineares elásticas. Com o objectivo de obter a estrutura de maior rigidez para um dado carregamento e condições de fronteira, o problema é resolvido pela minimização da energia de deformação sujeita a um constrangimento de volume. A formulação matemática para uma carga simples é introduzida. Esta penaliza as densidades relativas intermédias e utiliza um filtro numérico de controlo de perímetro.

A metodologia e formulação apresentada foi implementada no programa TopF. Este programa calcula a função objectivo com auxílio do programa de elementos finitos Abaqus<sup>®</sup> e determina, de forma iterativa, as densidades relativas de cada elemento pertencente ao domínio de projecto. Para isso recorre a um método de optimização heurístico baseado em multiplicadores de Lagrange.

Apresentam-se exemplos numéricos de problemas de optimização topológica em elasticidade linear 2D e 3D, que servem para validar a metodologia apresentada neste trabalho.

**keywords**

Structural optimization, topology optimization, finite elements, elasticity, deformation energy.

**abstract**

The process of structural optimization consists in obtaining the project of better performance, which is valued through an objective function defined from a set of variables that describe the structural system, called variables of project. In case of the topology optimization, this is carried out through the variation of the domain (topology) of the structure.

In general, the methods of topology optimization are based on the analysis of the sensibility of the objective function and constraints imposed on the problem. In this work a computational model is used for the determination of the best topology of linear and elastic structures. With the objective to obtain the structure with maximum global stiffness for a given load and constraints, the problem is solved designing for minimum compliance subject to a volume constraint. The mathematical formulation for a simple load is introduced. This one penalizes the relative intermediate densities and uses a numerical filter of control of perimeter.

The methodology and presented formulation was implemented in the program TopF. This program calculates the objective function with help of the program of finite elements Abaqus<sup>®</sup> and it determines, in an iterative way, the relative densities of each pertaining element to the design domain. For that it resorts to a heuristic method of optimization based on Lagrangian multipliers.

Numerical examples of problems of topology optimization in linear elasticity 2D and 3D are presented, and serve to validate the methodology presented in this work.

## Índice

<b>Índice .....</b>	<b>1</b>
<b>Lista de figuras .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Enquadramento .....</b>	<b>7</b>
1.1. Introdução .....	7
1.2. Simulação .....	9
1.3. Optimização .....	10
1.3.1. Conceitos Básicos .....	11
1.3.2. Métodos de Optimização Clássicos e Naturais .....	12
1.3.3. Optimização Estrutural .....	13
1.3.3.1. Histórico .....	14
1.3.3.2. Tipos de Optimização Estrutural .....	16
1.4. Optimização Topológica .....	17
1.5. Organização da Tese .....	22
<b>2. Modelação Matemática .....</b>	<b>23</b>
2.1. Introdução .....	23
2.2. Formulação do Problema de Optimização Topológica .....	23
2.3. Método de Optimização .....	24
2.3.1. Minimização da Energia de Deformação sujeita a um Constrangimento de Volume .....	25
2.3.2. Resolução do Método de Optimização .....	27
2.4. Teoria dos Elementos Finitos .....	29
2.4.1. Equações de Equilíbrio e Condições de Fronteira .....	31
2.5. Modelo de Comportamento Elástico .....	32
2.5.1. Tensão e Deformação Planas .....	33
2.5.2. Caso Geral .....	35



<b>3. Metodologia e Implementação</b>	37
3.1. Introdução	37
3.2. Algoritmo	37
3.3. Resolução de um Problema	40
3.4. Problemas de Implementação	41
3.4.1. Dependência da Malha	42
3.4.2. Instabilidade de Tabuleiro “checkerboard”	43
3.4.3. Mínimos Locais	46
<b>4. Aplicações, Resultados e Validação</b>	47
4.1. Introdução	47
4.2. Aplicações	47
4.2.1. Viga Bi-apoiada	47
4.2.2. Viga com Furo Fixo	52
4.2.3. Viga com Cargas Múltiplas	53
4.2.4. Estrutura Bi-constrangida	54
4.2.5. Viga Encastrada Tridimensional	57
4.2.6. Placa Tridimensional	61
4.2.7. Bloco Tridimensional	64
4.2.8. Suporte Cilíndrico	68
<b>5. Conclusões</b>	73
<b>Bibliografia</b>	75

## Lista de figuras

Figura 1.1: Esquema comparativo entre um projecto convencional e um projecto otimizado [21] .....	8
Figura 1.2: Optimização Estrutural: Optimização Dimensional (à esquerda), Optimização Topológica (à direita) e Optimização de Forma (abaixo) [3] .....	17
Figura 1.3: Procedimento típico de projecto estrutural por optimização topológica [14] .....	18
Figura 1.4: Distribuição de material pelo Método de Optimização Topológica no interior de um domínio fixo ao longo das iterações (somente metade do domínio é mostrado) .....	19
Figura 1.5: Fluxograma geral de Optimização Topológica de uma Estrutura [3] .....	21
Figura 2.1: Problema geral de Optimização Topológica .....	24
Figura 2.2: Gráfico da variação do factor de penalidade das densidades intermédias $p$ .....	26
Figura 2.3: Algumas formas geométricas possíveis para elementos finitos: (a) unidimensionais, (b) bidimensionais e (c) tridimensionais [28] .....	30
Figura 2.4: Representação esquemática do corpo sólido deformável $\Omega$ com a fronteira exterior $\Sigma$ .....	31
Figura 3.1: Fluxograma do processo de optimização topológica .....	38
Figura 3.2: Diagrama do modelo computacional de optimização topológica .....	39
Figura 3.3: Resolução de um problema de optimização de topologia pela metodologia implementada .....	41
Figura 3.4: Exemplo do fenómeno de Dependência da Malha [27] .....	43
Figura 3.5: Exemplo do fenómeno da Instabilidade de Tabuleiro “Checkerboard” [27] .....	44
Figura 3.6: Mínimos e Máximos de uma Função Objectivo .....	46

Figura 4.1: Viga bi-apoiada: a) domínio completo; b) metade do domínio com condições de simetria .....	47
Figura 4.2: Resultados da viga bi-apoiada após optimização topológica. Somente é representado metade do domínio .....	48
Figura 4.3: Variação da discretização da malha: Problema de dependência da malha .....	49
Figura 4.4: Variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ): Problema da Instabilidade de Tabuleiro “checkerboard” .....	50
Figura 4.5: Variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ ) .....	50
Figura 4.6: Gráfico da variação da função objectivo com o número de iterações .....	51
Figura 4.7: Gráfico da variação da densidade dos elementos com o número de iterações .....	51
Figura 4.8: Viga com furo fixo: Geometria, carregamento e condições de fronteira .....	52
Figura 4.9: Viga com furo fixo após optimização .....	52
Figura 4.10: Viga com cargas múltiplas: Geometria, carregamento e condições de fronteira .....	53
Figura 4.11: a) Viga após optimização com cargas $P_1$ e $P_2$ aplicadas em simultâneo; b) Viga após optimização com cargas $P_1$ e $P_2$ aplicadas separadamente .....	53
Figura 4.12: Estrutura bi-constrangida: Geometria, carregamento e condições de fronteira .....	54
Figura 4.13: Resultados da estrutura bi-constrangida após optimização topológica .....	55
Figura 4.14: Variação da discretização da malha: Problema de dependência da malha .....	56
Figura 4.15: Variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ): Problema da Instabilidade de Tabuleiro “checkerboard” .....	56
Figura 4.16: Variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ ) .....	56
Figura 4.17: Viga Encastrada Tridimensional: Geometria, carregamento e condições de fronteira .....	57
Figura 4.18: Resultados da viga encastrada tridimensional após optimização topológica: à esquerda as vistas centrais da estrutura; ao centro as vistas posteriores da estrutura; à direita as vistas centrais da	

estrutura suavizada (estrutura obtida através de interpolação entre os nós) .....	58
Figura 4.19: Variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ ) .....	59
Figura 4.20: Variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ) .....	59
Figura 4.21: Gráfico da variação da função objectivo com o número de iterações .....	60
Figura 4.22: Gráfico da variação da densidade dos elementos com o número de iterações .....	60
Figura 4.23: Placa Tridimensional: Geometria, carregamento e condições de fronteira .....	61
Figura 4.24: Resultados da placa tridimensional após optimização topológica: na coluna da esquerda podem observar-se as vistas centrais da estrutura com representação dos elementos; na coluna do centro as vistas de baixo da estrutura com representação dos elementos; na coluna da direita as vistas centrais da estrutura com interpolação entre os nós .....	62
Figura 4.25: Variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ ) .....	63
Figura 4.26: Variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ) .....	63
Figura 4.27: Bloco Tridimensional: Geometria, carregamento e condições de fronteira .....	64
Figura 4.28: Resultados do bloco tridimensional após optimização topológica para as cargas $P_1$ e $P_2$ : na coluna da esquerda podem observar-se as vistas centrais da estrutura com representação dos elementos; na coluna da direita podem observar-se as vistas centrais da estrutura com interpolação entre os nós .....	65
Figura 4.29: Resultados do bloco tridimensional após optimização topológica para as cargas $P_1$ e $P_2$ aplicadas em critério de cargas múltiplas: na coluna da esquerda podem-se observar as vistas centrais da estrutura; na coluna da direita podem observar-se as vistas centrais da estrutura suavizada .....	66
Figura 4.30: Gráfico da variação da função objectivo com o número de iterações .....	67
Figura 4.31: Gráfico da variação da densidade dos elementos com o número de iterações .....	67
Figura 4.32: a) Bloco material com suporte cilíndrico: Geometria,	

carregamento e condições de fronteira; b) corte efectuado no conjunto para melhor visualização .....	68
Figura 4.33: Resultados do bloco material após optimização topológica para a carga $P_i$ ; na coluna da esquerda pode observar-se a representação dos elementos da estrutura; na coluna da direita pode observar-se a estrutura com interpolação entre os nós .....	69
Figura 4.34: Resultados do bloco material após optimização topológica para o critério de cargas múltiplas: na coluna da esquerda pode observar-se a representação dos elementos da estrutura; na coluna da direita pode observar-se a estrutura com interpolação entre os nós .....	70
Figura 4.35: Problema da Instabilidade de Tabuleiro “checkerboard” .....	71
Figura 4.36: Tensões de Von Mises nos pontos de integração (factor de escala: $+2,377e^{+03}$ ) .....	72
Figura 4.37: Deslocamento espacial dos nós (factor de escala: $+2,377e^{+03}$ ) .....	72

## Capítulo 1. Enquadramento

### 1.1. Introdução

Durante muito tempo o desenvolvimento de projectos de engenharia na indústria foram realizados baseando-se em cálculos estruturais rudimentares e na experiência de projectos anteriores.

Até meados do século passado, estes projectos eram idealizados como um tipo de “arte”, onde se exigia ao projectista uma grande capacidade e experiência para a resolução dos problemas. Nessa altura o processo de projecto era geralmente um processo do tipo “tentativa e erro”, e as decisões eram tomadas a partir de suposições e intuições adquiridas ao longo do tempo.

Os motivos para a adopção deste tipo de procedimentos variavam. Os mais comuns são a falta de conhecimento de técnicas mais sofisticadas, recursos escassos para investimentos em equipamentos, necessidade de rapidez na apresentação de resultados (prejudicando a qualidade), e desinteresse por novas tecnologias causado pela falta de concorrência.

Mas esta situação tem-se alterado nas últimas décadas, e o desenvolvimento científico na área da análise estrutural teve um grande impulso devido sobretudo ao aumento da velocidade e capacidade de armazenamento dos computadores digitais, que permitiu o desenvolvimento de vários métodos computacionais, até então impossíveis de implementar. O aparecimento dos computadores digitais revolucionou técnicas para a resolução das equações complexas que regem os fenómenos da engenharia estrutural. Técnicas como o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos de Contorno, Método dos Volumes Finitos, entre outros, passaram a fazer parte do quotidiano do engenheiro estrutural.

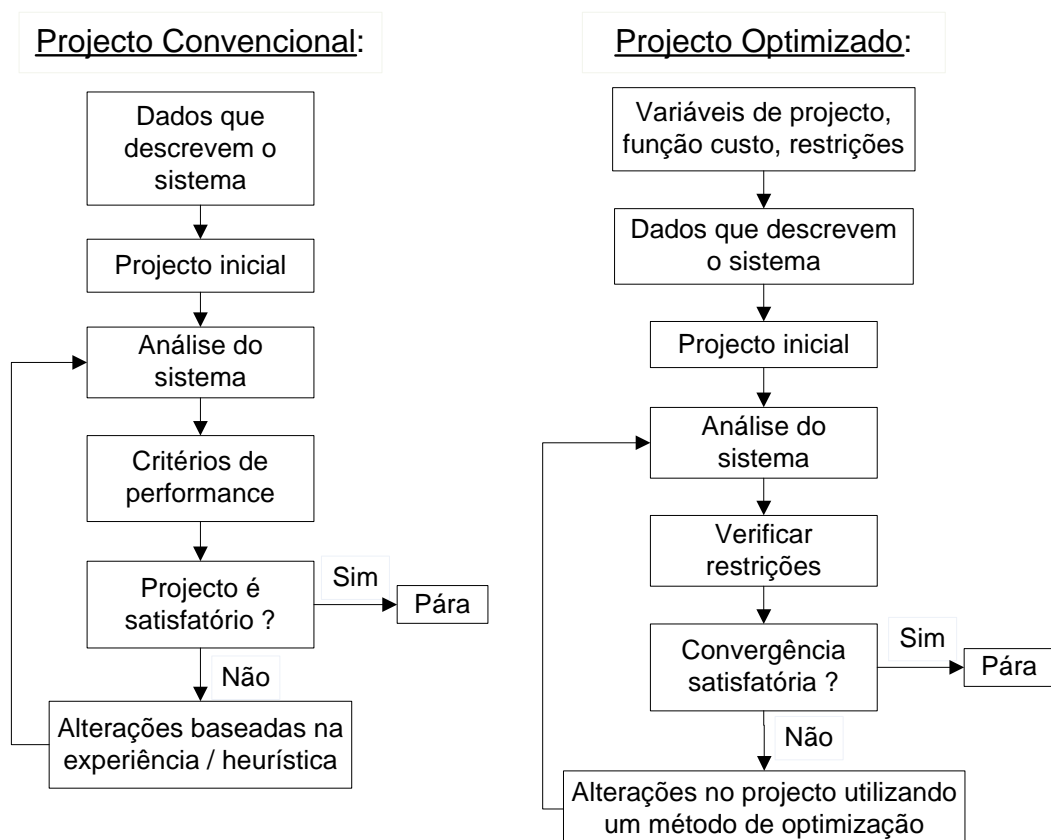
Actualmente, na engenharia moderna, existe uma maior exigência requerendo uma maior redução do tempo de projecto, produtos mais funcionais, mais eficientes, com maior qualidade e menor custo. Deste modo, é necessário a criação de métodos que ajudem a prever e analisar o comportamento de um produto mesmo antes do seu fabrico. Assim, podem-se criar produtos novos e sofisticados recorrendo a ferramentas computacionais baseadas em métodos científicos bem estabelecidos, visando a análise da estrutura, os seus parâmetros e a sua optimização.

Uma concepção mais moderna em engenharia baseia-se naquilo que a natureza e os seres humanos intuitivamente buscam: o óptimo. Tratando-se especificamente de engenharia computacional, busca-se o óptimo através de ferramentas adequadas, no caso, os métodos numéricos.

Hoje em dia já não basta projectar um sistema que desempenhe correctamente a sua função. Devemos projectar o melhor sistema possível.

Os processos de optimização podem ajudar na realização de um projecto consistente sem desperdiçar tempo e material, e com a certeza que este cumpre os requisitos básicos. A Optimização é uma ferramenta bastante flexível que permite melhorar o projecto de várias formas, consoante o que se escolha como objectivo, restrições e variáveis. Desta forma, os métodos de optimização estrutural auxiliam na criação de estruturas eficientes que satisfaçam as necessidades de maneira eficaz.

A figura 1.1 mostra de forma esquemática as diferenças entre um projecto convencional e um projecto optimizado. Nesta figura podemos observar que o projecto convencional analisa o sistema com base em critérios de performance e as alterações ao projecto são baseadas na experiência / heurística, enquanto que o projecto optimizado analisa o sistema através das variáveis de projecto, funções de custo e restrições, sendo as alterações no projecto realizadas através de um método de optimização.



**Figura 1.1: Esquema comparativo entre um projecto convencional e um projecto optimizado [21]**

## 1.2. Simulação

Nos dias de hoje a simulação de problemas de engenharia são de extrema importância para o estudo de casos reais. As abordagens numéricas aos problemas de engenharia são cada vez mais necessárias pois, na maioria das situações actuais, os métodos analíticos não conseguem dar resposta satisfatória à resolução de problemas complexos, muito frequentes em engenharia.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é, presentemente, o método numérico mais utilizado em engenharia quando se pretende simular o comportamento de sistemas reais. Consiste num método matemático de análise e resolução, quase sempre aproximada, de problemas científicos e de engenharia. O MEF é utilizado, na generalidade das vezes, em problemas para os quais não se conhece uma solução exacta mas que possa ser expressa de forma matemática. A aplicação do MEF a problemas de engenharia, forçosamente complexos, exige muitas vezes a disponibilidade de meios computacionais avultados. Consequentemente o desenvolvimento do próprio método dos elementos finitos tem vindo a processar-se de acordo com a disponibilidade tecnológica destes mesmos meios digitais. Este representa um papel fundamental e indispensável na investigação e desenvolvimento científico, devendo ser robusto e eficiente de forma a superar as não-linearidades dos modelos e conduzir a uma relação qualidade/custo computacional favorável.

O MEF divide a estrutura em subdomínios geometricamente mais simples (discretização do sistema) e resolve as equações lineares que descrevem o comportamento estrutural do sistema discretizado. Na implementação do MEF é sempre necessário, nalgum ponto do algoritmo, construir e/ou resolver um ou mais sistemas de equações algébricas, na forma

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

onde a matriz  $\mathbf{K}$  designa-se por matriz de rigidez e, na maioria das situações, é totalmente determinada antes de ser necessário resolver o sistema [28]. O vector  $\mathbf{u}$  é o vector das incógnitas do sistema – frequentemente os deslocamentos. Alguns dos seus elementos podem ser determinados ou conhecidos antecipadamente, sendo os restantes o objectivo de cálculo do método dos elementos finitos quando aplicado ao cálculo de estruturas. Por fim,  $\mathbf{f}$  é o vector dos carregamentos exteriores. Também aqui é frequente saber os seus elementos antecipadamente.

Na simulação através do método dos elementos finitos, a etapa da discretização é fundamental na qualidade dos resultados [5]. A escolha do tipo de elemento finito deve



ter em consideração o equilíbrio entre o custo computacional, a precisão de resultados e o tipo de representação. A escolha do elemento finito deve ter em consideração a representação do meio contínuo da forma mais realista possível.

Presentemente, o MEF é aplicado na análise e estudo de fenómenos e problemas muito diversos [28]. Estes vão desde o estudo de sistemas vibratórios, análise do comportamento de materiais, resolução de problemas de condução de calor e mecânica de fluidos, electricidade e magnetismo, entre outros. Na aplicação ao estudo do comportamento de materiais é possível abranger uma grande diversidade de comportamentos como, por exemplo, os lineares elásticos (Hooke), plásticos, viscoplásticos, hiperelásticos, térmicos, entre outros.

### 1.3. Optimização

A Optimização sempre esteve, mesmo que inconscientemente, presente na vida do homem, através de palavras como “melhor”, “mínimo” e “máximo”. Na verdade, o conceito de optimização confunde-se com o próprio conceito de engenharia, onde o objectivo principal é projectar algo com o menor “custo” possível.

Conceitos de optimização podem ser encontrados nos mais diversos campos do conhecimento científico, como a biologia, física, estatística, economia, entre outros.

Os problemas de optimização são caracterizados por situações em que se deseja maximizar ou minimizar uma função numérica de várias variáveis, num contexto em que podem existir restrições. As funções e as restrições dependem dos valores assumidos pelas variáveis de projecto ao longo do procedimento de optimização.

Em processos de optimização podem ser utilizados métodos computacionais que realizam uma busca racionalizada da solução óptima. A utilização de um algoritmo de optimização torna sistemática e automática a busca do ponto óptimo, independentemente da experiência do projectista. Dessa forma o termo optimização é correctamente utilizado quando estamos a utilizar um método matemático de busca sistemática da solução óptima.

A Optimização pode ser aplicada em diversas áreas, tais como no projecto de sistemas ou componentes, planeamento e análise de operações, problemas de estruturas, controle de sistemas dinâmicos, entre outros.

A Optimização tem várias vantagens, tais como:

- diminuição do tempo dedicado ao projecto;

- possibilitar o tratamento simultâneo de uma grande quantidade de variáveis e restrições de difícil visualização gráfica;
- possibilitar a obtenção de soluções não tradicionais e melhores;
- diminuição do custo.

A Optimização é considerada nos dias de hoje uma ferramenta indispensável para a análise de diversos problemas de decisão e alocação. Através da Optimização pode-se maximizar ou minimizar um problema de forma clara e objectiva, melhorando consideravelmente o desempenho de muitos processos.

### 1.3.1. Conceitos Básicos

Um problema de Optimização é definido, na sua forma mais geral, da seguinte forma:

Minimizar:

$$f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \quad (1.2)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, j \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, k \\ x_i^{(L)} &\leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Os componentes básicos de um problema de optimização são portanto:

- **Função Objectivo ( $f(\mathbf{x})$ ):** representa o objecto, quantificado matematicamente, a ser maximizado ou minimizado. A função objectivo é um escalar que pode representar o lucro, custo, energia, produção, distância, entre outros, em termos das variáveis ( $x_1, x_2, \dots$ ) de decisão do processo ou sistema em análise. Por outras palavras, é a função matemática cujo máximo ou mínimo se deseja encontrar.
- **Modelo do processo:** representa a forma como serão tratadas (equacionadas) a função objectivo e as variáveis de projecto, bem como as restrições (igualdades e desigualdades). As variáveis de projecto ( $x_1, x_2, \dots$ ) são as variáveis independentes (parâmetros) da função objectivo e, portanto, passíveis de alteração. Para que o

projecto seja tido como admissível, é necessário que os valores assumidos como variáveis de projecto satisfaçam todas as restrições impostas. As variáveis de projecto podem ser do tipo discreto, assumindo apenas alguns valores dentro de um conjunto, ou do tipo contínuo, assumindo valores dentro de um intervalo.

- **Restrições** ( $g_j(\mathbf{x})$ ,  $h_k(\mathbf{x})$ ,  $x_i^{(L)}$ ,  $x_i^{(U)}$ ): representam os limites impostos para o sistema. São os limites impostos às variáveis de projecto (restrições laterais) ou às funções das variáveis de projecto (restrições gerais). As restrições podem ser de igualdade ou desigualdade. As restrições em geral impõem uma solução de compromisso na melhoria da função objectivo e devem ser impostas com o cuidado de que sempre exista uma região viável de solução. Problemas mal definidos não possuem região viável e não tem solução.

Em conclusão, pode dizer-se que um problema de optimização caracteriza-se por uma função objectivo, que descreve o que se deseja otimizar, isto é, que mede a qualidade da decisão a ser tomada, e restrições, que limitam o espaço de busca da solução, restringindo esta a um grupo de soluções que atendam a certas necessidades.

Os problemas a serem abordados podem ser definidos por funções lineares e não lineares, com ou sem restrições. A formulação matemática do problema é a etapa fundamental para se conseguir uma boa solução. Se a descrição dos aspectos relevantes do problema (objectivos a serem optimizados e restrições a serem cumpridas) for bem feita, a probabilidade de se encontrar uma boa solução é maior.

### 1.3.2. Métodos de Optimização Clássicos e Naturais

Ao longo da história da Optimização, os métodos que se utilizavam para a resolução dos problemas foram variando, conforme os recursos disponíveis na época. Existem dois tipos de métodos de optimização que podemos diferenciar:

- Métodos de Optimização do gradiente ou clássicos
- Métodos de Optimização directos ou naturais

Ambos métodos têm tido um contributo fundamental na resolução dos problemas de engenharia. Os métodos de optimização do gradiente ou clássicos são conhecidos há mais de um século e são bastante fiáveis, sendo utilizados nos mais diversos campos da

engenharia e em outras ciências. Estes métodos encontram o valor óptimo pelo cálculo sucessivo do gradiente da função. Porém, estas técnicas podem apresentar algumas dificuldades numéricas e problemas de robustez relacionados com: a falta de continuidade das funções a serem optimizadas ou de suas restrições, funções não convexas e com ruídos, necessidade de se trabalhar com valores discretos para as variáveis, existência de mínimos ou máximos locais, entre outros. Os métodos clássicos possuem como grande vantagem o baixo número de avaliações da função objectivo, o que faz com que tenham convergência rápida.

Nos últimos anos tem ocorrido um enorme avanço nos recursos computacionais, o que permitiu o estudo de outros métodos que até então estavam bastante limitados. É o caso dos métodos de optimização directos ou naturais, que tem como factor limitante a necessidade de um número elevado de avaliações da função objectivo, o que requer um grande esforço computacional. Nestes métodos a função objectivo é avaliada várias vezes, sendo possível trabalhar com vários pontos ao mesmo tempo numa iteração. Isto eleva o custo computacional mas este facto é compensado pela menor probabilidade que estes métodos têm de convergir para mínimos locais. Desta forma, é necessário existir uma relação de compromisso.

De uma forma geral os métodos de optimização natural requerem maior esforço computacional quando comparados com os métodos clássicos, mas apresentam vantagens tais como a fácil implementação, robustez e não requerem continuidade na definição do problema. Como exemplo desta classe de métodos podem-se citar os Algoritmos Genéticos e o algoritmo conhecido como Bando de Partículas (Particle Swarm Optimization).

### **1.3.3. Optimização Estrutural**

A Optimização de Estruturas tem sido uma área activa de pesquisa no campo da busca e optimização, e pode ser aplicada a todos os tipos de estruturas nas mais diversas áreas. A Optimização Estrutural combina conceitos matemáticos e mecânicos com engenharia, e possui um campo multidisciplinar muito vasto para aplicações, tais como engenharia mecânica, civil, nuclear, aeronáutica e espacial. A consideração de recursos materiais e energéticos limitados, baixo tempo de produção, forte competição tecnológica e problemas ambientais, motivaram o aumento considerável da pesquisa em optimização estrutural.

No campo da engenharia, a optimização estrutural é uma importante área devido à sua contribuição na redução de custos, material e tempo nos projectos, especialmente para componentes e sistemas que requerem uma relação crucial entre peso e performance, segurança e fiabilidade. Isto provoca um aumento no desempenho dos componentes mecânicos, sem comprometer a sua integridade estrutural. Desta forma, a Optimização Estrutural torna-se uma ferramenta poderosa durante a fase de projecto de um produto.

A Optimização Estrutural é uma ferramenta importante para o engenheiro porque envolve ao mesmo tempo a análise estrutural e a procura do melhor projecto sujeito a certos objectivos e constrangimentos. Estes objectivos dependem do projecto total. Os mais comuns são a minimização da massa ou do volume total da estrutura, sob constrangimentos de deformação, tensão, fadiga ou critérios de falha, entre outros. De um modo geral, todos os objectivos estão relacionados com a minimização de custos.

O problema da Optimização Estrutural consiste genericamente na determinação de um conjunto de parâmetros da estrutura (as variáveis de projecto) de modo a minimizar ou maximizar uma função de custo (ou objectivo), que satisfaça o objectivo requerido. Ou seja, a Optimização Estrutural pode ser definida como uma forma racional de projecto estrutural, onde se busca o melhor projecto (no sentido de um melhor desempenho) dentro de um conjunto de possíveis projectos que satisfazem restrições de comportamentos e/ou geometrias.

Normalmente, em problemas reais, não é possível definir um único objectivo, sendo frequente otimizar-se uma estrutura para vários objectivos simultaneamente. Os problemas com objectivos múltiplos são de difícil resolução, e uma forma de ultrapassar esta dificuldade consiste em escolher o objectivo mais importante para função custo, considerando os restantes como constrangimentos ao problema.

Após a definição do problema de optimização, a sua resolução consiste geralmente em estabelecer um conjunto de condições necessárias de óptimo, que devem ser resolvidas recorrendo a um algoritmo adequado.

### **1.3.3.1. Histórico**

O conceito de optimização estrutural tem constituído um tópico de interesse por mais de 100 anos. O primeiro cientista a aplicar este conceito foi Maxwell em 1872. Naquela época haviam essencialmente estruturas civis, principalmente pontes. Maxwell

decidiu obter um projecto de ponte que utilizasse a menor quantidade de material e que verificasse o risco de falha.

Nessa tentativa, Maxwell estudou problemas simples utilizando conceitos da teoria da elasticidade. A ideia era, dado um carregamento num domínio infinito e os pontos onde esse domínio estaria apoiado (pontos de apoio da ponte, por exemplo), calcular o campo de tensões mecânicas principais usando a teoria da elasticidade. Uma vez obtidas as direcções das tensões principais, Maxwell sugeriu de forma conceitual que a estrutura óptima, que utilizasse menos material, seria constituída de elementos de treliça alinhados com essas direcções principais. Essa solução se mostrou mais tarde ser também a solução óptima para o projecto de uma estrutura com a máxima rigidez e menor peso considerando-se um carregamento único.

A ideia de Maxwell foi retomada por Michell em 1904, que decidiu aplicar o método para o projecto de vários tipos de estruturas com o menor volume de material. No entanto os resultados de Michell foram considerados muito académicos e sem aplicação prática, pois eram muito difíceis de serem construídos na época e, por isso, foram esquecidos. Esses resultados voltam a ser lembrados na década de 80 com a implementação de softwares baseados em optimização topológica que se propõem a sintetizar estruturas.

Nos finais da década de 40 e início da década de 50 as aplicações da optimização estrutural envolveram a minimização do peso de componentes utilizados na indústria aeronáutica.

Os computadores digitais surgiram no início da década de 50 e impulsionaram a aplicação de métodos numéricos de programação linear. Estes métodos eram aplicados para resolver problemas de optimização estrutural envolvendo treliças. Nos finais da década de 50 o interesse pela optimização estrutural foi grande na indústria aeroespacial devido à necessidade de projectar estruturas leves.

Durante a década de 50, além do avanço tecnológico ao nível da informática, ocorreram avanços teóricos significativos na área da mecânica estrutural. O aparecimento da teoria dos elementos finitos passou a permitir aos engenheiros projectistas a análise de estruturas complexas.

A optimização estrutural moderna, como é reconhecida desde o início da década de 60 até hoje, tem sido marcada por sucessivos progressos conseguidos ao nível da teoria da optimização, métodos numéricos de optimização, hardware e software. Neste cenário de desenvolvimento, a optimização estrutural não se limitou apenas às indústrias aeronáutica e espacial, mas expandiu-se a um maior número de domínios: construção automóvel, produção de máquinas-ferramentas, construção civil e naval.

Na década de 70, vários algoritmos de optimização para problemas não-lineares são implementados e na década de 80 surgem os primeiros softwares comerciais dedicados à optimização estrutural. Alguns softwares de CAE passaram a incluir nos seus códigos, módulos de optimização estrutural. No final da década de 80 surgem os métodos de optimização topológica (MOT), que representam o conceito de síntese estrutural na sua essência, sendo os métodos mais genéricos e poderosos disponíveis actualmente.

Desde o início da década de 90 até hoje, os MOT já estão disponíveis em softwares comerciais, sendo estendidos para outras áreas da engenharia além da mecânica estrutural, como eléctrica, fluidos, entre outras.

#### 1.3.3.2. Tipos de Optimização Estrutural

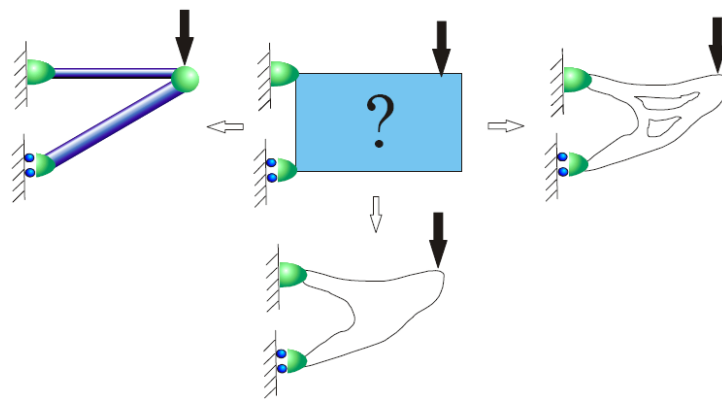
Conforme as variáveis de projecto utilizadas, podem-se distinguir 3 tipos de Optimização Estrutural, estando estes classificados da seguinte forma:

- **Optimização Dimensional:** o domínio ocupado pela estrutura é conhecido e fixo durante o processo de optimização, isto é, não é uma variável de projecto. As variáveis de projecto são parâmetros que caracterizam os elementos que constituem a estrutura (propriedades da rigidez do elemento), tais como a área da secção transversal das barras, espessura das placas, momento de inércia ou propriedades do material. O processo de optimização busca encontrar, por exemplo, a melhor área de secção transversal dos elementos de modo a obter a maximização da rigidez com mínimo volume de material. Assim, neste tipo de optimização não há alteração da forma da estrutura da peça mas apenas das suas dimensões (aspecto).
- **Optimização de Forma:** consiste em determinar o domínio óptimo de uma estrutura através da variação da fronteira (forma do contorno), ou seja, aqui altera-se a forma da estrutura de maneira a encontrar a solução óptima. As variáveis de projecto são parâmetros que caracterizam o domínio ocupado pela estrutura, tais como as posições dos nós de ligação dos elementos numa estrutura reticulada, o comprimento de uma viga, entre outros. Este tipo de optimização exige maior sofisticação na implementação numérica do que a optimização dimensional. A

primeira dificuldade é escolher as variáveis de projecto adequadas para parametrizar as formas no espaço de projecto.

- **Optimização Topológica:** procura o projecto óptimo através da variação da topologia da estrutura, ou seja, existe uma estrutura base de elementos estruturais possíveis, e escolhe-se a melhor distribuição possível dentro deste universo. A optimização topológica distingue-se dos outros problemas de optimização estrutural devido a não considerar a topologia fixa à partida. As variáveis de projecto são escolhidas de forma a permitirem decidir quais as zonas do espaço onde existe ou não estrutura. Deste modo, muda-se a conectividade do domínio e consequentemente a sua topologia.

Estes métodos e suas representações podem ser observados na figura 1.2.



**Figura 1.2: Optimização Estrutural: Optimização Dimensional (à esquerda), Optimização Topológica (à direita) e Optimização de Forma (abaixo) [3]**

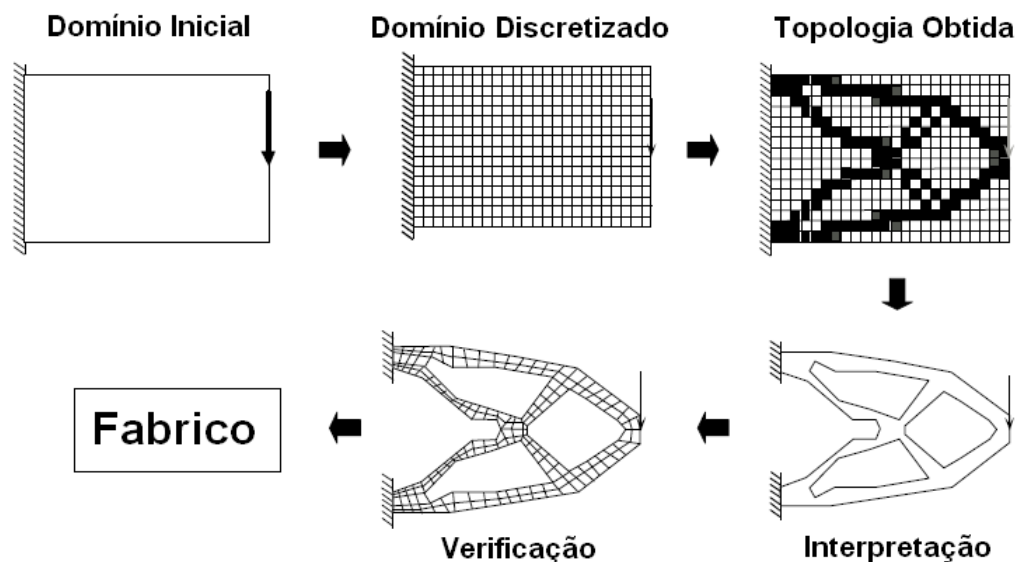
#### 1.4. Optimização Topológica

O problema de Optimização Topológica consiste em encontrar a melhor distribuição de material dentro de um domínio específico de projecto. Por outras palavras, é distribuir o material no interior de um espaço de projecto predefinido sob determinada condição de contorno, de modo a minimizar a função objectivo e atendendo às restrições. A distribuição de material ocorre tendo em consideração alterações em algum comportamento mecânico da estrutura, tal como a flexibilidade, frequências naturais, tensões, entre outros.



A Optimização Topológica combina essencialmente Métodos de Optimização com o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este tipo de optimização surgiu na década de 80 nos EUA e Europa. A Optimização Topológica tornou o processo de projecto mais genérico, sistemático e independente da experiência dos engenheiros, fornecendo a topologia inicial optimizada do dispositivo a ser construído para uma certa aplicação.

O procedimento típico de projecto estrutural utilizando a optimização topológica é apresentado na figura 1.3. O primeiro passo consiste em definir o domínio no qual a estrutura pode existir. Esse domínio é limitado pelas condições de fronteira da estrutura (pontos em que ela deve estar restrita) e pelos pontos de aplicação de carga. Outras limitações podem estar relacionadas com a restrição do espaço ocupado.



**Figura 1.3: Procedimento típico de projecto estrutural por optimização topológica [14]**

No segundo passo o domínio é discretizado em elementos finitos e são aplicadas as condições de fronteira.

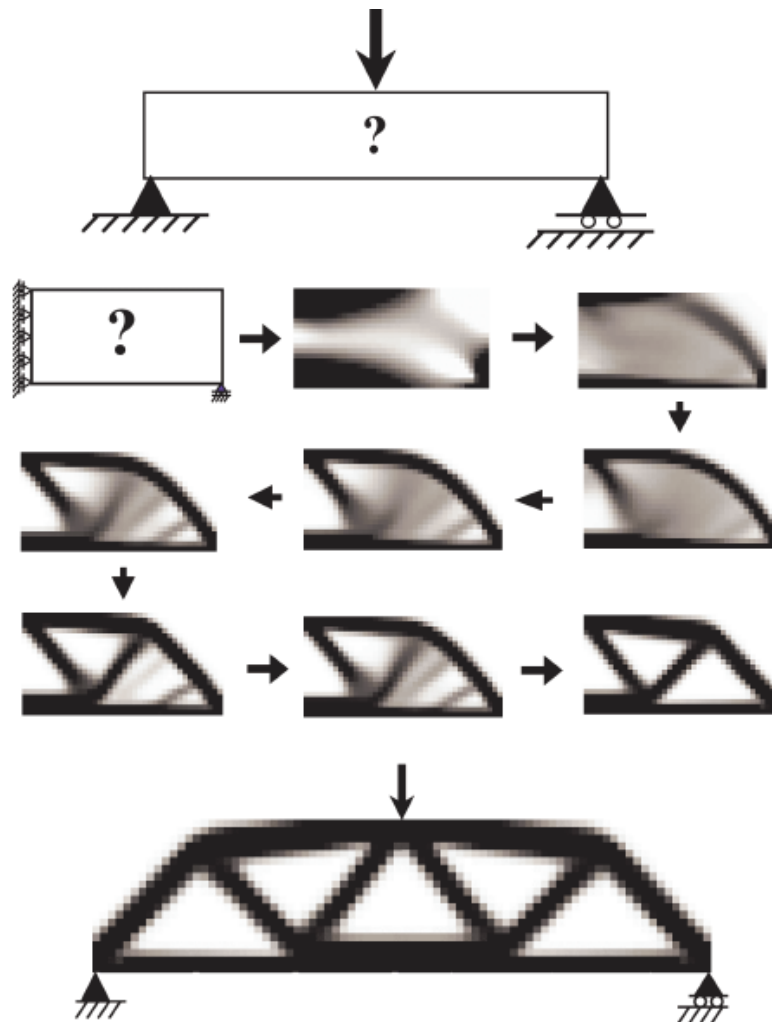
No terceiro passo os dados do domínio são fornecidos ao software de optimização topológica que, num processo iterativo, distribui o material no domínio de forma a minimizar (ou maximizar) a função objectivo especificada. Dessa forma, a imagem da estrutura obtida representa um excelente ponto de partida que necessita ser interpretado para se obter o projecto final da estrutura.

Na quarta etapa ocorre essa interpretação, que pode ser feita usando-se métodos de processamento de imagem, ou simplesmente desenhando-se uma estrutura baseada na imagem obtida pela optimização topológica.

A quinta etapa consiste na verificação do resultado final da estrutura. Normalmente os resultados gerados pela otimização topológica não são intuitivos e é necessário verificar a estrutura final usando o método dos elementos finitos para comprovar a optimalidade do resultado.

A sexta etapa é o fabrico da estrutura. Hoje existem várias técnicas de fabrico que permitem fabricar estruturas com formas complexas como, por exemplo, a prototipagem rápida, entre outras.

A figura 1.4 ilustra como o método de otimização topológica distribui o material no interior do domínio fixo ao longo das iterações. O problema considerado consiste na obtenção da estrutura com maior rigidez e menor peso num domínio bi-apoiado sujeito a um carregamento no seu centro.



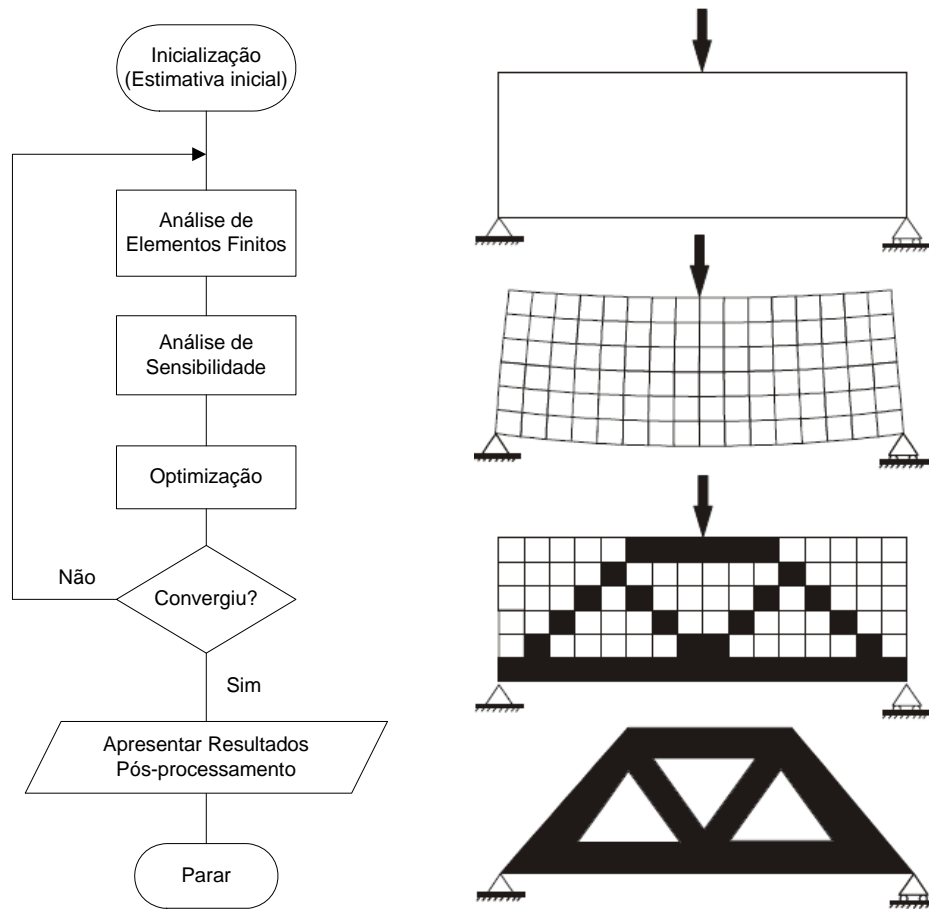
**Figura 1.4:** Distribuição de material pelo Método de Otimização Topológica no interior de um domínio fixo ao longo das iterações (somente metade do domínio é mostrado)

A Optimização Topológica de estruturas pode ser dividida em duas categorias distintas, considerando o tipo de parametrização do domínio do projecto:

1. Optimização Topológica a partir de um meio discreto: o domínio contínuo é aproximado por um conjunto de elementos barra ou viga no domínio do projecto. As dimensões das secções transversais das barras ou vigas são definidas como variáveis de projecto. Quando a área de um elemento tende a zero, este elemento é removido. Aqui a variação de conectividade significa não só gerar ou eliminar membros estruturais entre as juntas já existentes, mas também definir novas juntas ou remover as juntas existentes.
2. Optimização Topológica a partir de um meio contínuo: consiste na determinação, para cada ponto do espaço de projecto, da presença ou não de material. Por outras palavras, a optimização topológica transforma-se num problema de determinação da melhor distribuição de material dentro do domínio. As variáveis de projecto (como a densidade, características geométricas da microestrutura, entre outras) estão envolvidas com a distribuição de material e possuem uma característica de funções distribuídas ao longo do domínio de análise. Aqui a variação da conectividade pode significar tanto separar ou juntar os domínios estruturais, como também gerar ou excluir estes domínios.

No projecto da topologia de uma estrutura, determina-se a distribuição óptima de um material isotrópico no espaço de projecto, que é definido por uma região de projecto, condições de contorno de deslocamento e de forças prescritas. Esta distribuição óptima depende da função objectivo a ser minimizada e das restrições impostas ao projecto. Nesta perspectiva, o domínio do projecto é mantido fixo, limitado pelos pontos de apoio da estrutura e pontos de aplicação de carregamento. Deve-se então, determinar a distribuição óptima das propriedades do material ao longo do domínio, de forma que os pontos materiais desse domínio possam ser caracterizados como vazio ou cheio. Na implementação numérica, o domínio é discretizado numa malha de elementos finitos, que pode permanecer inalterada durante o processo de optimização. Portanto a optimização topológica é considerada como um problema pontual material / vazio [3].

A figura 1.5. ilustra o fluxograma geral utilizado na optimização topológica de uma estrutura.



**Figura 1.5: Fluxograma geral de Optimização Topológica de uma Estrutura [3]**

Inicialmente é feita uma estimativa para as variáveis de projecto que definem o domínio. O domínio é limitado pelas condições de fronteira (restrições de deslocamento) e regiões de aplicação de carregamentos. É também discretizado numa malha de elementos finitos. Faz-se uma análise de elementos finitos para o cálculo dos deslocamentos. Em seguida calculam-se as sensibilidades (gradientes) das variáveis de projecto em relação à função objectivo e dá-se início ao processo de optimização que irá encontrar a melhor distribuição de material no domínio de forma a maximizar ou minimizar a função objectivo especificada. Havendo convergência no processo de optimização, dentro de uma tolerância especificada, o procedimento é finalizado. Caso contrário, o processo é reiniciado com a actualização das variáveis de projecto, utilizando o passo e a direcção de descida do algoritmo de optimização [3].

As técnicas de optimização têm permitido reduções drásticas nos custos do produto final através da redução da quantidade de material, tendo grande impacto nas indústrias de produção de larga escala (e.g. peças automóveis) e nas indústrias em que a redução de peso é uma exigência do produto (e.g. aeronáutica).

É importante acrescentar que a aplicação de técnicas de optimização não causa impacto apenas no desempenho mecânico em si da peça, mas pode causar impacto em toda a cadeia produtiva. Assim, por exemplo, a redução de peso de uma peça pode reduzir o seu tempo de produção permitindo que sejam produzidas mais peças e que mais peças sejam transportadas. Portanto, reduzindo os custos ao longo de toda a cadeia produtiva.

Além do problema clássico de optimização de maximização de rigidez para o menor volume de material, outras funções objectivo são possíveis ainda na área da mecânica estrutural clássica, como por exemplo, a maximização da frequência de ressonância, a minimização da resposta em frequência da estrutura e a maximização da energia de impacto. Algumas destas funções já estão implementadas em softwares comerciais.

Recentemente a optimização topológica tem-se expandido para outras áreas da engenharia a nível académico, como o projecto de mecanismos flexíveis, actuadores, motores pizoeléctricos e dispositivos electromagnéticos.

## **1.5. Organização da Tese**

Para além do enquadramento, esta tese possui mais quatro capítulos. No capítulo 2 apresentam-se os modelos matemáticos e formulações numéricas dos processos a estudar. Apresentam-se a formulação de um problema de optimização topológica, uma breve síntese à teoria dos elementos finitos e a modelos de comportamento elástico, e a descrição do método de optimização utilizado em optimização de topologia.

No capítulo 3 apresentam-se a metodologia e implementação do algoritmo utilizado. Descreve-se a resolução de um problema e os problemas numéricos de implementação que ocorrem em um processo de optimização topológica.

No capítulo 4 apresentam-se as aplicações, resultados e validação, através da análise de vários exemplos no âmbito da mecânica estrutural.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

## Capítulo 2. Modelação Matemática

### 2.1. Introdução

No capítulo anterior fez-se um enquadramento dos problemas de Optimização em engenharia, de forma a situar a origem, os métodos utilizados, quais as vantagens e sua importância na indústria. Desta forma, falou-se em conceitos básicos de simulação e dos métodos de Optimização, com particular atenção à Optimização Topológica. Este processo envolve formulações matemáticas que estão definidas e que são rigorosas.

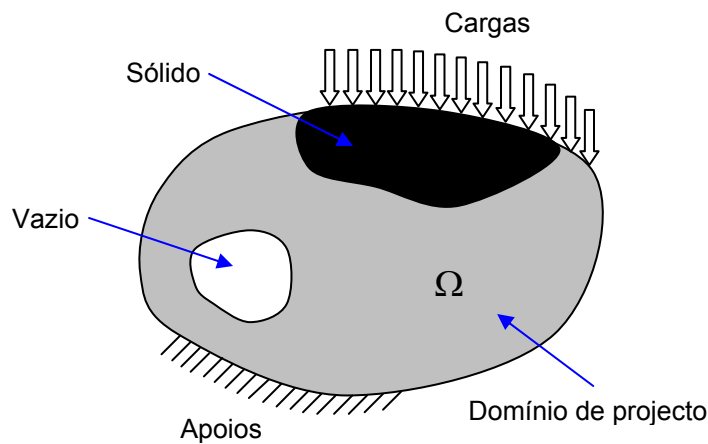
Neste capítulo apresenta-se a modelação matemática que define o método de Optimização Topológica, e que serve de base para a construção dos diversos problemas analisados ao longo deste trabalho. Na secção 2.2. apresenta-se a formulação de um problema de Optimização Topológica. Na secção 2.3. apresenta-se o método de Optimização, as equações numéricas que o definem e sua resolução. Na secção 2.4. apresentam-se as equações base da teoria do método dos elementos finitos e na secção 2.5. faz-se uma introdução ao modelo de comportamento elástico.

### 2.2. Formulação do Problema de Optimização Topológica

O problema de Optimização Topológica tem como objectivo encontrar a melhor distribuição para uma dada quantidade de material no interior de um espaço de projecto predefinido, sob determinadas condições e cargas. Neste caso, a minimização da energia de deformação é a função objectivo. A quantidade de material é sujeita a um constrangimento de volume (ou massa) e a distribuição é limitada ao domínio do corpo  $\Omega$ . Este domínio pode ter regiões fixas sólidas ou vazias [20]. Na figura 2.1 podemos observar o problema geral de optimização topológica.

O primeiro passo no algoritmo de optimização topológica é a definição do domínio, ou seja, da possível região do espaço a ser ocupada pela estrutura. A etapa seguinte é definir as cargas a que está sujeito o domínio em questão. Segue-se então com a discretização do domínio através do método dos elementos finitos. Conhecida a

distribuição dos esforços no domínio, é possível adicionar ou remover material de certas áreas, conforme a energia de deformação.



**Figura 2.1: Problema geral de Otimização Topológica**

### 2.3. Método de Otimização

O problema de optimização topológica é na sua génese um problema de optimização inteira, consistindo na identificação da função característica do domínio ocupado pela estrutura, de modo a satisfazer um objectivo requerido. Isto é, pretende calcular a função  $\rho$  em que

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{se existe material} \\ 0 & \text{se não existe material} \end{cases} \quad (2.1)$$

Em geral este problema não tem solução. O problema discreto, controlado por um parâmetro  $\rho$  que indica a existência de material ( $\rho=1$ ) ou não existência de material ( $\rho=0$ ), não é bem formulado matematicamente, isto é, não garante a existência de mínimo. Os algoritmos conhecidos para optimização inteira não permitem um grande número de variáveis de projecto, imprescindível para resolver problemas de optimização topológica. Uma forma de superar esta dificuldade é fazer uma abordagem microestrutural do problema, onde a malha de elementos finitos é mantida constante durante todo o processo de optimização, enquanto as mudanças ocorrem nas propriedades constitutivas do material. Esta abordagem microestrutural admite a existência de “material intermédio” com propriedades constitutivas que variam continuamente entre material sólido e vazio. Este comportamento pode ser simulado através da definição de um material com

microestruturas ou “poroso”. Uma técnica bastante utilizada por sua simplicidade é admitir que o comportamento do material seja controlado por uma única variável  $\rho \in [0,1]$ , frequentemente chamada de “densidade” do material. Nesta formulação, denominada SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), o tensor de elasticidade  $E_{ijkl}$  e a massa  $M$  são dados como

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0, \quad M = \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega, \quad p > 1, \quad (2.2)$$

onde  $E_{ijkl}^0$  é o tensor de elasticidade do material de referência. A função de densidade  $\rho(x)$  entra na relação da rigidez numa potência  $p > 1$  que tem um efeito de penalização sobre as densidades intermédias  $0 < \rho < 1$ , fazendo com que a rigidez dada por  $E$  tenha um comportamento não linear com a densidade (isto é, menor que a relação de proporcionalidade). Ou seja, o uso do modelo SIMP para  $p > 1$  força a topologia a caminhar para valores limites das densidades,  $\rho = 0$  (vazio) e  $\rho = 1$  (sólido) [25].

A vantagem desta formulação é, no aspecto teórico, a introdução de um material poroso com microestrutura na formulação do problema de optimização estrutural, correspondente à relaxação do problema. Para além desta vantagem, o problema discretizado pelo método dos elementos finitos é um problema de programação matemática com um número finito de variáveis de projecto correspondentes à densidade relativa, considerada constante em cada elemento, facilitando a sua implementação computacional [9]. Esta formulação revelou ser um modelo eficaz para a obtenção da topologia óptima de estruturas. Desde então, muito trabalho tem sido desenvolvido na área de optimização de topologia para estruturas contínuas.

### 2.3.1. Minimização da Energia de Deformação sujeita a um Constrangimento de Volume

A densidade de um elemento pertencente ao domínio de projecto pode ser dada por

$$\rho = x^e \rho_0 \quad (2.3)$$

onde a variável  $x^e$  representa a densidade relativa do material no elemento e  $\rho_0$  é a densidade do corpo sólido homogéneo.

A energia de deformação  $C$  pode ser definida por

$$C = \mathbf{F}^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}^e \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = \sum_{e=1}^N x^p \mathbf{u}^e \mathbf{K}^0 \mathbf{u}^e \quad (2.4)$$

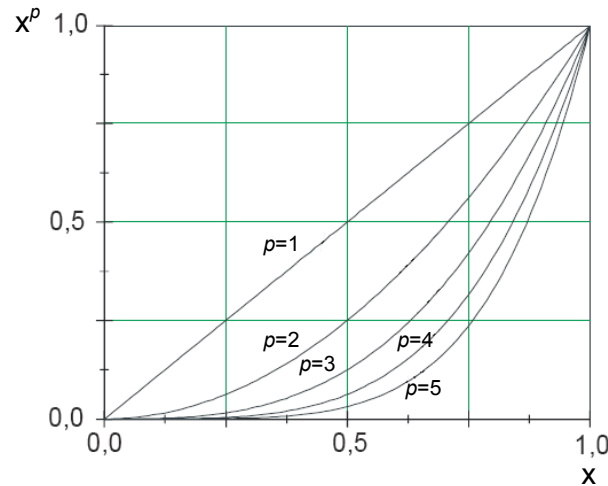


onde  $N$  é o número de elementos utilizados para discretizar o domínio,  $\mathbf{u}^e$  é o vector de deslocamentos em cada elemento,  $\mathbf{K}^e$  é a matriz de rigidez e  $x$  representa a densidade relativa.

A rigidez para um elemento é dada por

$$\mathbf{K}^e = (x^e)^p \mathbf{K}^0 \quad (2.5)$$

onde  $p$  é o factor de penalidade das densidades intermédias. Escolhendo o factor de penalidade igual a 1 obtém-se frequentemente elementos com densidades intermédias. Tais estruturas são difíceis de fabricar. Se escolhermos um factor de penalidade igual a 2 ou 3, a experiência indica uma configuração onde o elemento simples é preenchido com ausência ou existência de material homogéneo com densidade  $\rho_0$ . Na figura 2.2 pode-se observar um gráfico que demonstra a influência penalizante do factor de penalidade nas densidades intermédias  $p$ .



**Figura 2.2: Gráfico da variação do factor de penalidade das densidades intermédias  $p$**

O volume do material a ser utilizado pode ser definido por

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{v}, \quad (2.6)$$

onde  $V_0$  é o volume do domínio,  $\mathbf{v}$  é o vector dos volumes elementares e  $\mathbf{x}$  é o vector que agrega as densidades relativas dos elementos.

Pretende-se minimizar a energia de deformação sujeita a um constrangimento de volume. Desta forma, o problema de Optimização Topológica baseado na lei da potência (SIMP – Solid Isotropic Material with Penalization), utilizando a discretização através do método dos elementos finitos, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && C = \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\
&\text{sujeito a:} && f = \frac{V}{V_0} \\
&&& : \quad \mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{u} \\
&&& : \quad \mathbf{0} < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vector de forças,  $\mathbf{K}$  é a matriz rigidez global do material,  $x_{\min}$  é o limite inferior para a densidade e  $x_{\max}$  é o limite superior. Neste caso escolheu-se  $x_{\max} = 1$  e para  $x_{\min}$  é, por razões numéricas, normalmente utilizado o valor de  $10^{-3}$ . O limite inferior tem o valor de  $10^{-3}$  para evitar que a matriz de rigidez torne-se singular.

### 2.3.2. Resolução do Método de Optimização

Para resolver o problema de Optimização utiliza-se um método baseado na função Lagrangiana. Utiliza-se um critério de óptimo (método heurístico) para actualizar as variáveis de projecto obtendo-se o multiplicador de Lagrange por iteração [20].

O Lagrangiano para o problema de Optimização referido anteriormente é definido por

$$L = C + \lambda(V - fV_0) + \boldsymbol{\lambda}_1^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F}) + \sum_{e=1}^N \lambda_2^e (x_{\min} - x^e) + \sum_{e=1}^N \lambda_3^e (x^e - x_{\max}), \tag{2.8}$$

onde  $\lambda$  e  $\boldsymbol{\lambda}_1$  são os multiplicadores de Lagrange globais e  $\lambda_2^e$  e  $\lambda_3^e$  são os multiplicadores de Lagrange para as restrições laterais inferior e superior. Os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ ,  $\lambda_2^e$  e  $\lambda_3^e$  são escalares e o multiplicador de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}_1$  é um vector.

O óptimo é encontrado quando as derivadas da função Lagrangiana com respeito às variáveis de projecto são iguais a zero, de acordo com:

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = 0, \quad \text{para } e = 1, N.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = \frac{\partial C}{\partial x^e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x^e} + \boldsymbol{\lambda}_1^T \frac{\partial (\mathbf{K} \mathbf{u})}{\partial x^e} - \lambda_2^e + \lambda_3^e = 0. \tag{2.9}$$

Assumindo que as restrições laterais inferior e superior não estão activas ( $\lambda_2^e = \lambda_3^e = 0$ ) e que os carregamentos são independentes do projecto  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ , a equação 2.9 toma a forma

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x^e} \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x^e} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^e} + \lambda \mathbf{v}^e + \lambda_1^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x^e} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^e} \right). \quad (2.10)$$

Simplificando a expressão anterior, obtém-se

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x^e} \mathbf{u} + \lambda_1^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x^e} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^e} (2\mathbf{u}^T \mathbf{K} + \lambda_1^T \mathbf{K}) + \lambda \mathbf{v}^e \quad (2.11)$$

Visto que  $\lambda_1^T$  é arbitrário, pode seleccionar-se de forma a eliminar as derivadas  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^e}$ .

Então, coloca-se  $\lambda_1^T$  igual a  $-2\mathbf{u}^T$  e obtém-se que  $2\mathbf{u}^T \mathbf{K} + \lambda_1^T \mathbf{K}$  é igual a zero. Logo

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x^e} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}^e = -p(x^e)^{p-1} \mathbf{u}^e \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e + \lambda \mathbf{v}^e = -p(x^e)^{p-1} q_c + \lambda \mathbf{v}^e = 0 \quad (2.12)$$

onde

$$q_c = \mathbf{u}^e \mathbf{K}^0 \mathbf{u}^e, \quad (2.13)$$

é a energia para um elemento sólido, com  $x^e = 1$ . Pode-se agora actualizar as variáveis de projecto, com base na equação 2.10:

$$\frac{p(x^e)^{p-1} q_c}{\lambda \mathbf{v}^e} = 1. \quad (2.14)$$

O significado físico da equação 2.12 é que a densidade da energia de deformação deve ser constante ao longo do domínio do projecto. O multiplicador de Lagrange  $\lambda$  tem uma função reguladora de forma a que a densidade da energia de deformação se torne constante. Deste modo, pode utilizar-se um esquema heurístico para actualizar as variáveis de projecto. A actualização das variáveis de projecto pode ser definida por

$$x_{K+1}^e = x_K^e \left( \frac{p(x^e)^{p-1} q_c}{\lambda \mathbf{v}^e} \right)^\zeta = x_K^e (B_K^e)^\zeta \quad (2.15)$$

onde  $\zeta$  é um amortecimento numérico, normalmente igual a 0.5, e  $K$  o número de iterações. O amortecimento pode variar de 0 a 1. A função do amortecimento é estabilizar a iteração.

Não se pode permitir que haja a possibilidade de que a densidade relativa varie muito numa iteração como, por exemplo, o elemento variar desde o vazio ao sólido. Então introduz-se um limite móvel nas variáveis de projecto. O objectivo do limite móvel é também estabilizar a iteração. No esquema de actualização, tomam-se os limites móveis das variáveis de projecto  $\mathbf{x}$  em consideração:

$$x_{K+1}^e = \left\{ \begin{array}{ll} \max((1-m)x_K^e, x_{\min}) & \text{se } x_K^e (B_K^e)^\zeta \leq \max((1-m)x_K^e, x_{\min}) \\ x_K^e (B_K^e)^\zeta & \text{se } \max((1-m)x_K^e, x_{\min}) \leq x_K^e (B_K^e)^\zeta \leq \min((1+m)x_K^e, x_{\max}) \\ \min((1+m)x_K^e, x_{\max}) & \text{se } x_K^e (B_K^e)^\zeta \geq \min((1+m)x_K^e, x_{\max}) \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

onde  $m$  é o limite móvel. O limite móvel pode variar de 0 a 1, mas na maioria dos casos  $m=0.2$ .

O multiplicador de Lagrange deve também satisfazer a restrição de volume. Pode-se agora actualizar o multiplicador de Lagrange de forma iterativa de maneira a verificar-se

$$g(\lambda) = V(x(\lambda)) - fV_0 = 0. \quad (2.17)$$

Note que a função  $g(\lambda)$  tem uma dependência monótona de decréscimo contínua do multiplicador de Lagrange. Deste modo, pode utilizar-se o método de bissecção para determinar quando a função toma o valor nulo.

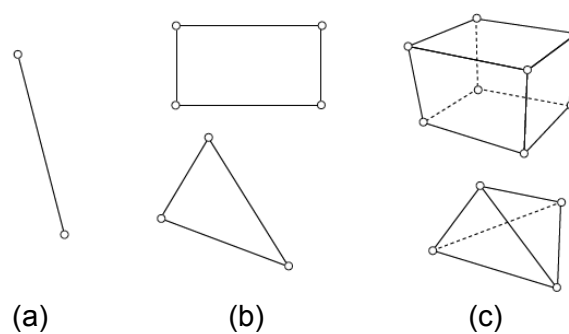
O tipo de algoritmo que se descreve tem sido utilizado com resultados satisfatórios num grande número de problemas de design de topologia de estruturas, e é visto como um método estável e eficiente na resolução de uma grande variedade de problemas. A eficiência do algoritmo advém do facto de que cada variável de projecto é actualizada independentemente da actualização das outras variáveis. Posteriormente, de modo a satisfazer o constrangimento de volume, é feito um escalonamento relativo da actualização das variáveis de projecto de acordo com a equação 2.15.

## 2.4. Teoria dos Elementos Finitos

A realização de uma análise numérica utilizando o método dos elementos finitos é essencialmente um meio aproximado de determinar o comportamento de um sistema real. Consegue-se levar a cabo esta tarefa calculando a solução algébrica de um conjunto finito de equações que descrevem o sistema real, recorrendo apenas a um número limitado de variáveis. O sistema real é modelado por um conjunto de elementos delimitados por uma rede de pontos, linhas, superfícies e volumes – a malha de elementos finitos. Cada elemento fica completamente definido pelas suas características geométricas, pelas propriedades do material de que é constituído e por um conjunto de parâmetros e leis matemáticas que regulam o seu comportamento. O comportamento de cada elemento relativamente aos elementos adjacentes é descrito pelos carregamentos e deslocamentos a que está sujeito. Estes deslocamentos são também função de um

número finito de variáveis definidas em pontos convenientes da malha de elementos finitos. O comportamento do sistema completo é então calculado após agregação do comportamento individual de cada elemento. O estado no interior de um elemento genérico é calculado a partir dos valores determinados num número finito de pontos – os seus nós – ou na sua fronteira [29].

Os elementos finitos podem ter várias formas geométricas, conforme observa-se na figura 2.3. Se forem bidimensionais são frequentemente quadriláteros ou triângulos. A três dimensões são geralmente hexaédricos, tetraédricos ou pentaédricos.



**Figura 2.3: Algumas formas geométricas possíveis para elementos finitos: (a) unidimensionais, (b) bidimensionais e (c) tridimensionais [28]**

Do ponto de vista de um analista, que utiliza um programa de simulação pelo método dos elementos finitos, existem três fases distintas:

1. Pré-Processamento: diz respeito à construção do modelo geométrico e discretização do sistema a estudar e definição dos carregamentos e condições a que este será submetido. Esta informação, sobre o estudo a realizar, é introduzida num ou mais ficheiros de dados de entrada.
2. Análise: corresponde ao momento em que todos os cálculos são efectuados. Inicialmente verifica-se toda a informação contida no ficheiro de dados de entrada. Não existindo erros, a análise numérica é levada a cabo e são criados ficheiros de saída contendo toda a informação e resultados requeridos pelo utilizador.
3. Pós-Processamento: apresenta-se toda a informação dos resultados de diferentes formas gráficas e/ou tabulares.

### 2.4.1. Equações de Equilíbrio e Condições de Fronteira

O sistema que se pretende estudar numericamente é um corpo sólido deformável que ocupa um espaço físico designado por  $\Omega$  delimitado exteriormente pela superfície  $\Sigma$ . Este encontra-se representado de forma esquemática na figura 2.4.

Em termos gerais supõe-se que no instante de tempo  $t$  o corpo  $\Omega$  está submetido a um conjunto de carregamentos exteriores de ordem diversa – forças volúmicas, forças de superfície, forças devidas a gradientes e variações de temperatura, entre outras.



**Figura 2.4:** Representação esquemática do corpo sólido deformável  $\Omega$  com a fronteira exterior  $\Sigma$

Admite-se ainda existir um conjunto finito de superfícies  $\Sigma_i$  pertencentes a  $\Sigma$  e no exterior de  $\Omega$ , tais que  $\Sigma = \cup \Sigma_i$ , e nas quais são conhecidos o campo de velocidades  $\mathbf{v}$  e/ou os carregamentos. Desta forma, é possível formular matematicamente o estado de equilíbrio de  $\Omega$  do seguinte modo:

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega. \quad (2.18)$$

Na equação de equilíbrio anterior  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor das tensões de Cauchy,  $\mathbf{b}$  é o vector das forças exteriores por unidade de volume que inclui a possibilidade de efeitos de aceleração e  $\text{div}$  designa o operador matemático divergente.

As condições de fronteira a que o sólido deformável  $\Omega$  está sujeito também podem ser resumidas matematicamente da seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \quad \text{sobre } \Sigma_v, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^* \quad \text{sobre } \Sigma_t, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \wedge \mathbf{t} = \mathbf{t}^* \quad \text{sobre } \Sigma_{v,t}. \quad (2.21)$$

Nas expressões anteriores,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}^*$  designam os campos de velocidade genérica e prescrita, respectivamente, e  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}^*$  os vectores de tensão de Cauchy genérico e prescrito, respectivamente. Se  $\mathbf{n}$  for o vector unitário da normal exterior à superfície  $\Sigma$  em qualquer ponto, então

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}. \quad (2.22)$$

A reunião de todas as zonas de fronteira  $\Sigma$  em que existem velocidades prescritas é  $\Sigma_v$ ,  $\Sigma_t$  é a reunião de todas as zonas da fronteira  $\Sigma$  em que existem forças prescritas e  $\Sigma_{v,t}$  é a reunião das zonas de  $\Sigma$  em que são conhecidos simultaneamente os campos de velocidades e de tensões [29].

## 2.5. Modelo de Comportamento Elástico

Para um determinado estado de tensão definido pelas componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ , etc., é possível determinar as componentes de deformação em qualquer uma das direcções do sistema de eixos  $Oxyz$ . Para tal basta sobrepor, ou seja, somar, as componentes de deformação nessa direcção provocadas por cada uma das componentes individuais de tensão [28]. Por exemplo, de acordo com a lei de Hooke, a tensão normal  $\sigma_{xx}$  produz uma deformação de magnitude

$$\frac{\sigma_{xx}}{E}$$

na direcção do eixo  $Ox$ . Por sua vez, as componentes  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$  produzem deformações de magnitude

$$-\frac{\nu\sigma_{yy}}{E} \quad \text{e} \quad -\frac{\nu\sigma_{zz}}{E},$$

também na direcção de  $Ox$ . Nas quantidades anteriores,  $E$  é o módulo de elasticidade ou módulo de Young do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. Assim, sobrepondo as três componentes resulta que

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (2.23)$$

Procedendo de modo idêntico para  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{zz}$  resulta

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (2.25)$$

Por outro lado, as deformações de corte são dadas por

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (2.26)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad (2.27)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad (2.28)$$

em que  $G$  é o módulo de corte ou de rigidez do material, igual a

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.29)$$

### 2.5.1. Tensão e Deformação Planas

Quando uma placa fina é submetida a um conjunto de carregamentos no seu próprio plano, diz-se que se está na presença de um estado de tensão plana [28]. Considerando que a direcção normal ao plano da referida placa é o eixo  $O_z$  então, nesta situação,

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2.30)$$

Por outro lado, num estado de deformação plana, as componentes de deformação na direcção do eixo  $O_z$  são nulas, ou seja

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (2.31)$$

No entanto, para que esta condição se mantenha, tem que existir a componente de tensão  $\sigma_{zz}$ . Regressando às condições de tensão plana, em geral existem deformações na direcção normal à placa, causadas pelo efeito de Poisson. Consequentemente, introduzindo as igualdades 2.18 nas relações 2.11, 2.12, 2.15 e 2.16, as componentes de deformação resultam

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad (2.33)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} \frac{2(1+\nu)}{E}. \quad (2.34)$$

Reescrevendo as relações anteriores em função das componentes de tensão fica



$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad (2.35)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.36)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} . \quad (2.37)$$

De forma matricial pode escrever-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

ou ainda

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{\text{TP}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.39)$$

em que  $\mathbf{D}^{\text{TP}}$  é a matriz de elasticidade para o caso de tensão plana.

Note-se, no entanto, que num estado de tensão plana tem-se também que

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) . \quad (2.40)$$

Relativamente ao estado de deformação plana, introduzindo as igualdades 2.19 nas relações 2.13, 2.15 e 2.16 obtêm-se

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (2.42)$$

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (2.43)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} . \quad (2.44)$$

Substituindo a equação 2.31 nas relações 2.29 e 2.30 e rearranjando os termos pode escrever-se

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \quad (2.45)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \quad (2.46)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} . \quad (2.47)$$

As expressões anteriores podem agrupar-se de forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

ou ainda

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{\text{DP}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.49)$$

em que  $\mathbf{D}^{\text{DP}}$  é a matriz de elasticidade para o caso de deformação plana.

Note-se, no entanto, que num estado de deformação plana também se verifica a equação 2.31, ou seja

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (2.50)$$

### 2.5.2. Caso Geral

Para o caso 3D, pode escrever-se de forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

ou ainda

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.52)$$

em que  $\mathbf{D}$  é a matriz de elasticidade para o caso tridimensional.



## Capítulo 3. Metodologia e Implementação

### 3.1. Introdução

No capítulo anterior introduziu-se a formulação matemática empregue nos problemas de Optimização. Desta forma falou-se em como é feita a formulação de um problema de Optimização Topológica. Apresentou-se de forma resumida a teoria dos elementos finitos e os modelos de comportamento elástico.

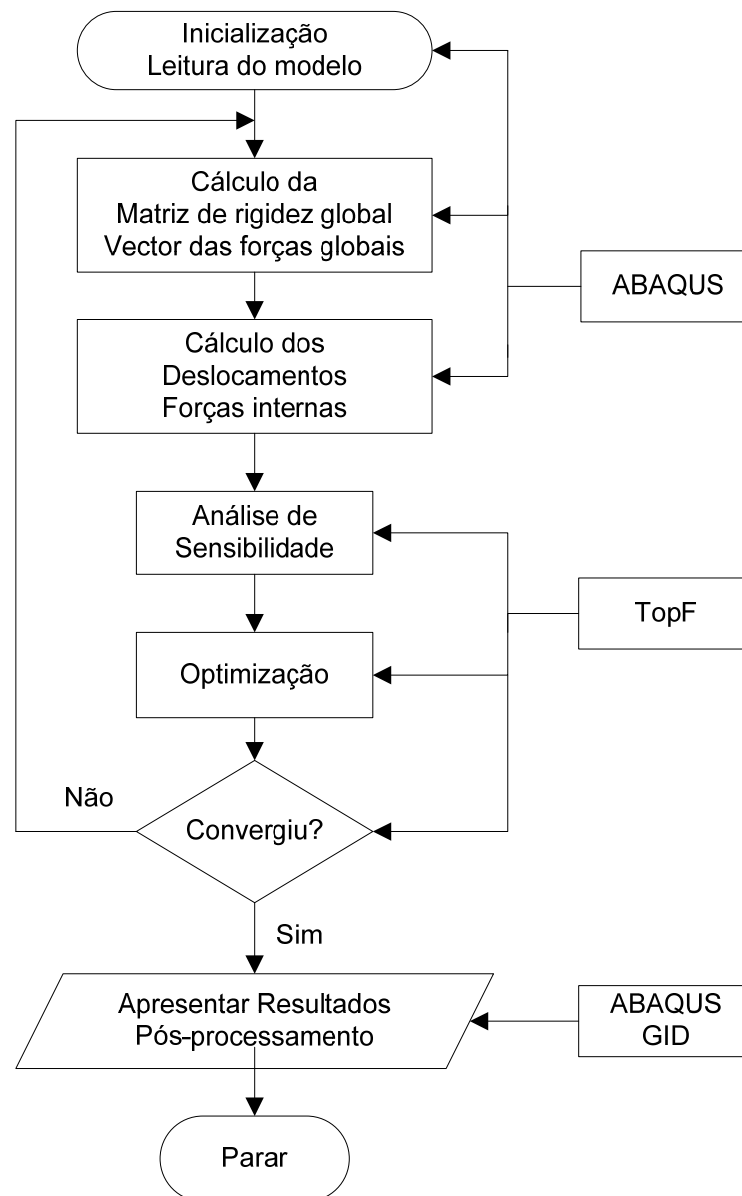
Neste capítulo apresenta-se a metodologia e implementação utilizada na Optimização Topológica e que foi utilizada na resolução dos diversos problemas ao longo deste trabalho. Na secção 3.2. apresenta-se o algoritmo utilizado na resolução dos problemas de Optimização Topológica e a sua implementação. Na secção 3.3. apresenta-se como é resolvido numericamente um problema de Optimização Topológica, com base na interacção entre a simulação e optimização. Na secção 3.4. apresentam-se os problemas numéricos de implementação que podem ocorrer durante o processo de Optimização Topológica e a sua resolução.

### 3.2. Algoritmo

Conforme descrito no capítulo 1, a resolução de um problema de Optimização consiste em estabelecer um conjunto de equações necessárias de óptimo que devem ser resolvidas através da utilização de um algoritmo adequado. Para o problema de Optimização Topológica, as equações foram estabelecidas no capítulo 2. Nesta secção apresenta-se o fluxograma e o diagrama do modelo computacional do processo de optimização topológica de uma estrutura.

Na figura 3.1 pode observar-se o fluxograma do processo de optimização topológica. Este processo inicializa-se com a leitura do modelo. De seguida efectua-se o cálculo das matrizes de rigidez elementares e global, o vector das forças globais, deslocamentos e forças internas. Para estes processos é utilizado o programa ABAQUS®. Após estes cálculos faz-se a análise de sensibilidade. Esta análise, assim como o cálculo de optimização (evolução das variáveis de projecto), é feita através do

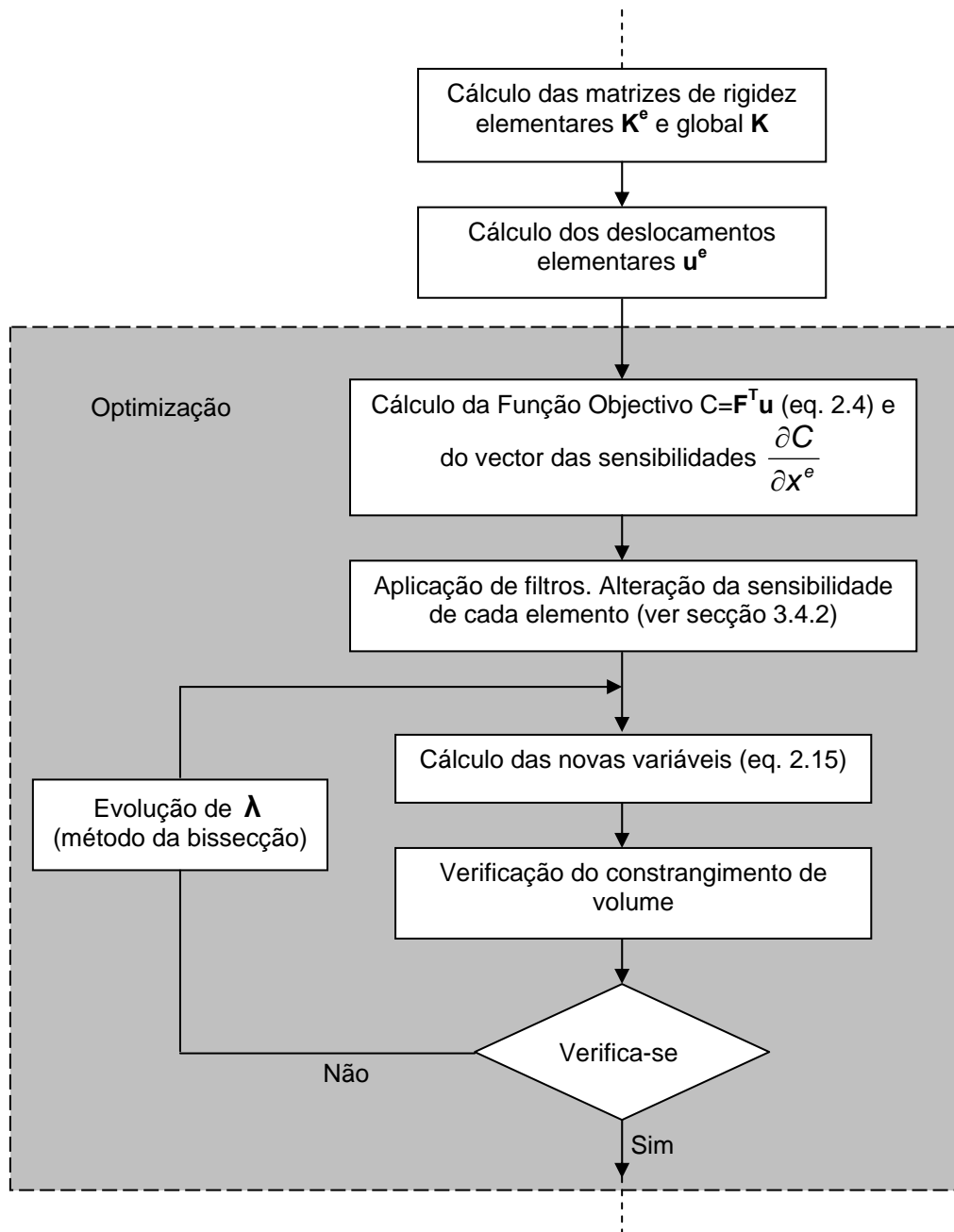
programa TopF<sup>1</sup>. Se o processo convergir são apresentados os resultados para pós-processamento que pode ser feito utilizando o programa ABAQUS® e GID®. Caso contrário, uma nova iteração é começada.



**Figura 3.1: Fluxograma do processo de otimização topológica**

Na figura 3.2 pode observar-se como é realizada a otimização, através de um diagrama do modelo computacional de otimização topológica. Através dos valores dos deslocamentos elementares, calcula-se a função objectivo e o vector das sensibilidades.

1- O programa TopF foi desenvolvido no seio do GRIDS (Grupo de Investigação e Desenvolvimento de Software de Simulação) da Universidade de Aveiro.



**Figura 3.2: Diagrama do modelo computacional de optimização topológica**

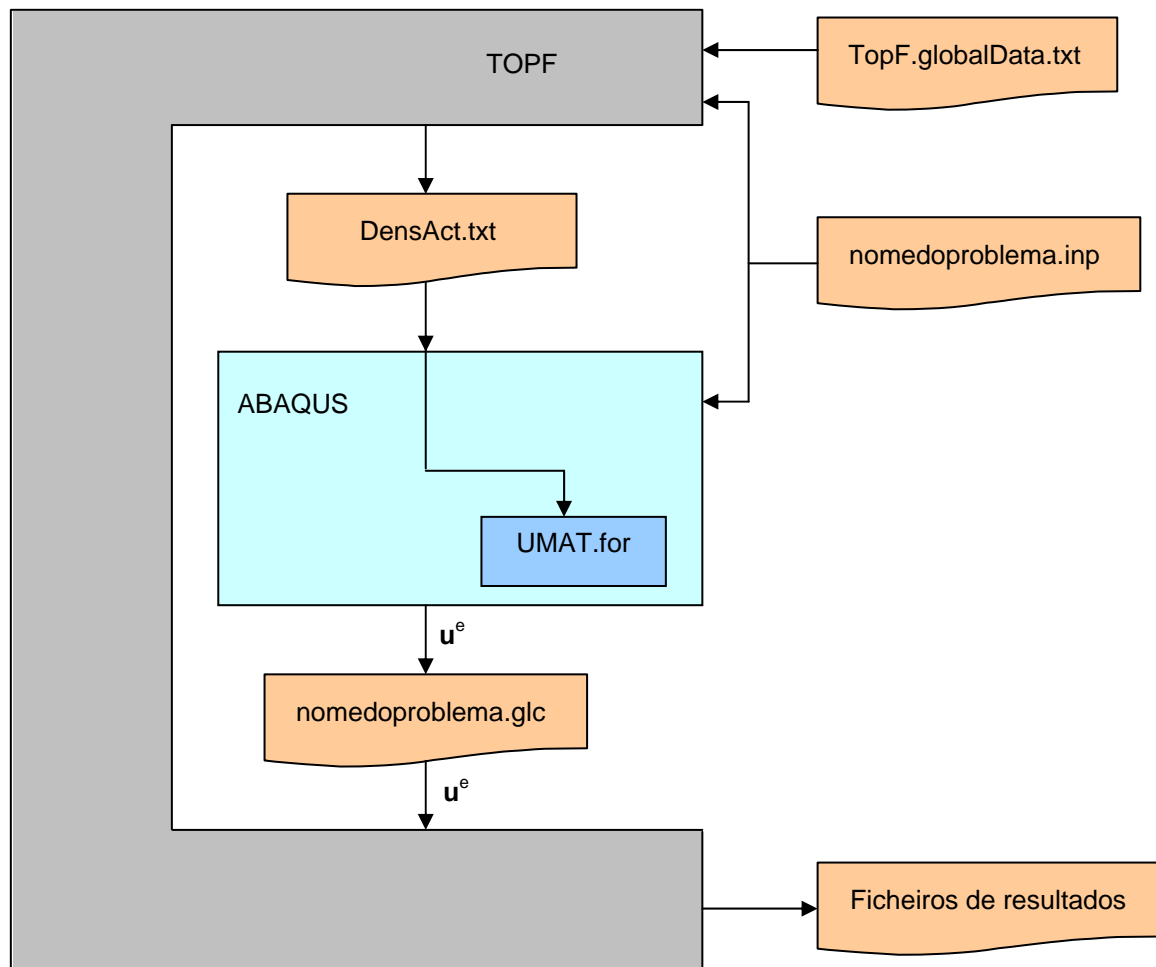
De seguida aplicam-se os filtros havendo desta forma a alteração da sensibilidade de cada elemento (ver secção 3.4). É realizado o cálculo das novas variáveis e verificado o constrangimento de volume. Se o constrangimento do volume for verificado termina o processo de optimização. Caso contrário, calcula-se novo valor para o multiplicador de Lagrange  $\lambda$  através do método da bissecção e este valor entra no cálculo das novas variáveis repetindo-se nova iteração.

### 3.3. Resolução de um Problema

Assim como na resolução de um problema pelo MEF, a resolução de um problema de optimização topológica, de um modo geral, pode ser dividido em três etapas: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

O Pré-processamento envolve duas etapas. Na etapa 1 são definidos o espaço de projecto, as condições de fronteira, informações sobre as propriedades do material, e a aproximação do domínio por uma malha de elementos finitos. Todas estas informações podem ser geradas através da interface gráfica de um pré-processador padrão. No nosso caso foi utilizado o programa ABAQUS® CAE para efectuar este processo de modelação do problema. Na etapa 2, o ABAQUS® CAE gera um arquivo de entrada de dados (*nomedoproblema.inp*) para a próxima fase do projecto, o processamento. O arquivo de entrada de dados (*nomedoproblema.inp*) contém todas as informações referentes às propriedades do material e a malha de elementos finitos, tais como: número de elementos, número de nós, coordenadas dos nós, conectividades e condições de fronteira.

O Processamento é a fase onde vai desenvolver-se o processo de optimização auxiliado por uma análise pelo método dos elementos finitos. Para esta tarefa utiliza-se o programa de optimização TopF. O programa TopF utiliza um ficheiro denominado *TopF.globalData.txt* de controlo dos parâmetros de cálculo. A leitura do ficheiro gerada pelo ABAQUS® CAE, *nomedoproblema.inp* é também realizada pelo programa TOPF de forma a obter todas as informações sobre a malha de elementos finitos e propriedades dos materiais. No início do processo iterativo de optimização o programa TopF gera o ficheiro *DensAct.txt* que contém a listagem das densidades iniciais para cada elemento. A primeira etapa do processo iterativo consiste na execução de uma análise pelo método dos elementos finitos recorrendo ao programa ABAQUS®. Este programa é executado utilizando uma subrotina de utilizador UMAT [1] que tem a função de ler o ficheiro *DensAct.txt* e de construir a matriz rigidez elementar isotrópica, considerando a densidade de cada elemento (ver equação 2.5). O programa ABAQUS® escreve os resultados dos deslocamentos elementares num ficheiro de extensão *g/c* que é lido pelo programa TopF. Após a obtenção de toda a informação necessária, são calculadas as sensibilidades e novos valores de densidade relativa para cada elemento. O novo vector das densidades relativas  $\mathbf{x}$  é reescrito novamente no ficheiro *DensAct.txt*. Caso não haja convergência do processo, dá-se início a uma nova iteração após a escrita de alguns resultados. Estas etapas estão representadas no esquema da figura 3.3.



**Figura 3.3: Resolução de um problema de otimização de topologia pela metodologia implementada**

Na fase de Pós-processamento é realizada a visualização/análise dos resultados do arquivo de saída de dados. Esta fase é realizada recorrendo ao pós-processador padrão GID<sup>®</sup>. Neste programa é possível a visualização, análise e tratamento dos resultados dos ficheiros de saída de dados (*result.opt.flavia.res* e *result.flavia.res*).

### 3.4. Problemas de Implementação

A Otimização Topológica tem possibilitado diversos tipos de aplicações industriais. No entanto, existem dificuldades na aplicação do método relacionadas com problemas numéricos. De uma forma geral e segundo Bendsøe & Sigmund [4], podem-se dividir



estes problemas numéricos em três categorias: dependência da malha, instabilidade de tabuleiro “checkerboard” e mínimos locais.

### 3.4.1. Dependência da Malha

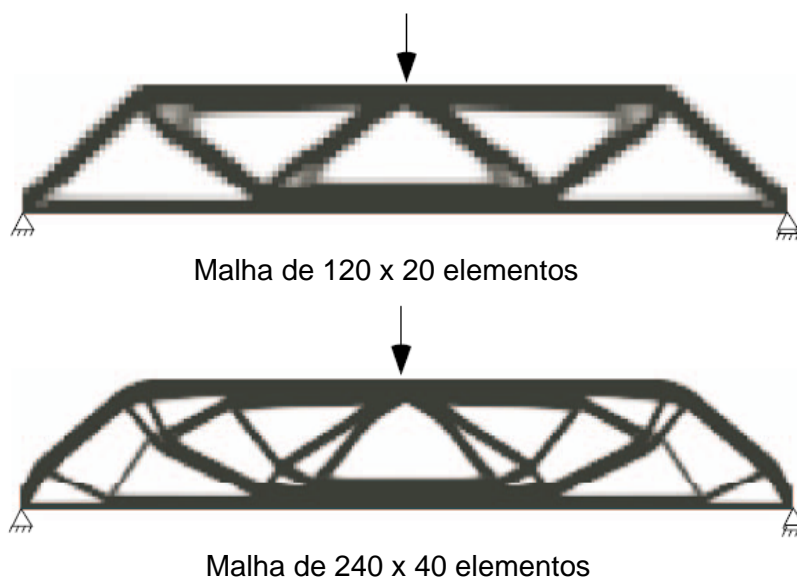
O problema de dependência da malha é caracterizado pelo facto que um problema de optimização topológica com domínio e condições de fronteira constantes apresente diferentes soluções conforme a discretização da malha de elementos finitos. Ou seja, diferentes discretizações da malha de elementos finitos não geram qualitativamente a mesma solução.

Espera-se que quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, maior será a nitidez da topologia óptima da estrutura. No entanto, as malhas mais refinadas geram estruturas mais complexas, com topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo resultante de uma malha mais grosseira.

A dependência da malha ocorre devido à introdução de furos na estrutura sem alteração do volume, o que gera normalmente um aumento na eficiência da estrutura. No limite deste processo as variações estruturais apresentam um melhor aproveitamento de material. Tais microestruturas são normalmente não isotrópicas e não podem ser representadas pelas descrições de projecto de um material isotrópico. Isto faz com que o conjunto admissível de projectos não seja fechado. Na implementação computacional este efeito é visto como uma instabilidade numérica onde uma grande quantidade de furos aparece quando uma malha refinada de elementos finitos é utilizada.

O problema de dependência da malha pode ser dividido em duas categorias, conforme a sua origem. Pode ser uma manifestação numérica da não existência de solução do problema, e resulta na obtenção de diferentes topologias à medida que se aumenta a discretização da malha. Existe também a possibilidade do problema não apresentar unicidade de solução, situação dependente das condições de fronteira aplicadas ao problema.

Na figura 3.4 podemos observar o fenómeno da dependência da malha. O refinamento da malha de elementos finitos deveria idealmente fornecer a mesma topologia com uma maior definição do contorno. No entanto, a malha mais refinada resultou numa estrutura mais complexa, o que cria uma dificuldade do ponto de vista do fabrico.



**Figura 3.4: Exemplo do fenómeno de Dependência da Malha [27]**

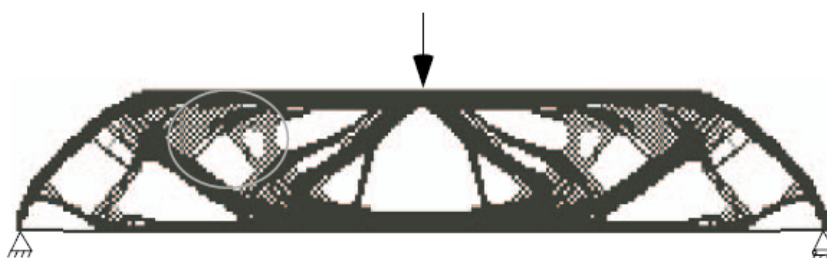
Segundo Bahia [3] existem procedimentos para activar a independência do refinamento da malha. A abordagem utilizada consiste em reduzir o espaço de projectos admissíveis incorporando restrições globais ou locais na variação da densidade, impedindo desta forma a geração de microestruturas ou estruturas mais detalhadas. Outra técnica empregue para a obtenção da independência da malha consiste em estender o espaço de projectos de tal forma que sejam aceites materiais de densidade intermédia entre o vazio e o cheio (compósitos). No entanto, isto não é possível quando o objectivo é a obtenção de projectos 0 – 1, ou seja, apenas constituídos por material sólido (densidade 1) ou vazio (densidade 0). Ainda outras técnicas incluem a utilização de filtros e algoritmos de controlo de perímetro [3].

### **3.4.2. Instabilidade de Tabuleiro “checkerboard”**

O problema de instabilidade de tabuleiro, conhecido na literatura como “checkerboard”, é caracterizado pelo aparecimento de regiões onde elementos com e sem material (pretos e brancos) se alternam entre elementos vizinhos de modo a criar um padrão similar a um tabuleiro de xadrez. Este efeito é indesejado pois não se configura uma distribuição óptima de material. Este fenómeno aparece devido à discretização, ou seja, à formulação (funções de interpolação) do elemento finito utilizado no processo de optimização.

Segundo Stump [27], a causa do checkerboard pode ser apresentada de duas formas. A explicação mais simples e directa é de que quando o campo de densidades apresenta o padrão geométrico de um tabuleiro de xadrez, a rigidez dessa região é artificialmente mais elevada que a rigidez de uma região homogénea, com mesmo volume de material. Essa situação se acentua nos casos de carga que provocam esforços de corte. A segunda forma de explicar o problema baseia-se no facto de que se está a resolver um problema variacional misto, com o objectivo de determinar dois campos físicos: o campo de deslocamentos e o campo de densidades.

Na figura 3.5 podemos observar o fenómeno da instabilidade de tabuleiro “checkerboard”.



**Figura 3.5: Exemplo do fenómeno da Instabilidade de Tabuleiro “Checkerboard” [27]**

As instabilidades de tabuleiro podem ser minimizadas ou removidas com o uso das mesmas técnicas descritas anteriormente. A remoção deste problema numérico ocorre porque quando adiciona-se uma restrição geométrica que garante a existência de solução (em termos de medida do contorno ou variação do gradiente), também obtém-se uma convergência de elementos finitos, sendo a malha suficientemente fina para que não ocorram instabilidades.

Segundo Lima [14], a maioria dos trabalhos sugere duas formas distintas para a eliminação do “checkerboard” nos problemas de optimização topológica. Uma delas é aumentar a ordem do elemento finito e a outra é utilizar métodos de filtragem ou de controlo de gradientes.

Aumentar a ordem do elemento significa aumentar o número de nós do elemento finito. Os elementos bidimensionais com 8 ou 9 nós possuem funções de interpolação que representam melhor (aproximação mais refinada) o campo de deslocamentos no elemento e, consequentemente, o campo de deformações. Então, a utilização de elementos com maior número de nós permite reduzir o erro induzido aos termos de deformação de corte no elemento, e portanto representar de forma menos “artificial” a rigidez num arranjo de elementos finitos. Isto provavelmente explica a razão pela qual o

“checkerboard” não aparece quando se utiliza elementos finitos de alta ordem nos problemas. Esta alternativa é cara devido ao alto custo computacional, pois a matriz de rigidez do modelo do método dos elementos finitos torna-se demasiadamente grande à medida que aumentamos o número de nós do elemento. Então, de um modo geral, formas mais económicas são preferidas.

Uma outra alternativa muito utilizada é a introdução de métodos de controlo das variáveis de projecto (densidades). Variações bruscas nos gradientes das variáveis de projecto favorecem a formação do “checkerboard”. Sendo assim, a utilização de um método de controlo sobre a variação espacial das variáveis de projecto evita esse fenómeno, além de permitir um razoável controlo da complexidade da topologia obtida pelo método de optimização topológica. A suavização da variação das variáveis de projecto nos problemas de optimização topológica é feita através de restrições inseridas na própria formulação do problema de optimização, ou através de métodos de filtragem. Estes métodos de filtragem são mais utilizados devido à facilidade de implementação e rapidez computacional, embora não garantam o controle efectivo da variação das variáveis de projecto.

A sensibilidade da função objectivo é dada por

$$\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_e} = -p(\mathbf{x}_e)^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_e. \quad (3.1)$$

Com vista a garantir a existência de soluções nos problemas de optimização topológica, devem ser introduzidas algumas restrições nos resultados. Aqui é usada uma técnica de filtragem [23]. O filtro para independência da malha funciona através da modificação da sensibilidade do elemento da seguinte forma

$$\left. \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_e} \right|_f = \frac{1}{\mathbf{x}_e \sum_{f=1}^N \hat{H}_f} \sum_{f=1}^N \hat{H}_f \mathbf{x}_f \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_f}. \quad (3.2)$$

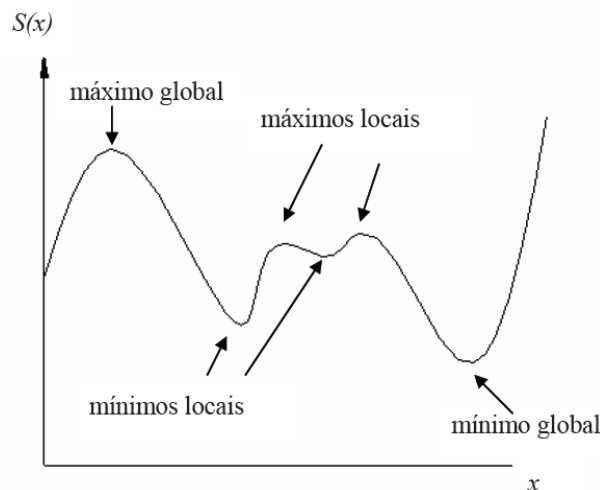
O operador de convolução (factor de ponderação) é definido como

$$\begin{aligned} \hat{H}_f &= r_{\min} - \text{dist}(\mathbf{e}, f), \\ \{f \in N \mid \text{dist}(\mathbf{e}, f) \leq r_{\min}\}, \quad \mathbf{e} &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde o operador  $\text{dist}(\mathbf{e}, f)$  é definido como a distância entre o centro do elemento  $\mathbf{e}$  e o centro do elemento  $f$ ,  $r_{\min}$  é o valor para o filtro (distância média dos elementos). Ao seleccionar-se  $r_{\min}$  menor do que o tamanho do elemento, não se está a penalizar a sensibilidade do elemento. O operador de convolução  $\hat{H}_f$  é zero fora da área do filtro. O operador de convolução decai linearmente com a distância do elemento  $f$ .

### 3.4.3. Mínimos Locais

A maioria dos problemas de projecto topológico é não convexo. A não convexidade do problema leva à existência e à possibilidade de encontrarmos muitos mínimos locais. Logo, podem obter-se diferentes soluções para o mesmo problema discretizado quando são utilizadas diferentes estimativas iniciais para as variáveis e diferentes parâmetros do algoritmo de optimização. Isto ocorre porque as provas de convergência dos algoritmos funcionam para programação convexa, enquanto que para programação não convexa apenas garante-se a convergência para pontos estacionários, que não são necessariamente mínimos globais, conforme podemos observar na figura 3.6.



**Figura 3.6: Mínimos e Máximos de uma Função Objectivo**

Os algoritmos de optimização global disponíveis são, na sua grande maioria, incapazes de lidar com uma grande quantidade de variáveis de projectos, como é o caso das variáveis de projecto de optimização topológica. Alguns autores sugerem a utilização de “métodos de continuação” para garantir de certa forma uma convergência estável na direcção de projectos fiáveis. A ideia dos métodos de continuação é mudar gradualmente o problema de optimização de um problema convexo (artificial), que permite regiões de densidade intermédia, para um problema de projecto original não convexo (problema 0 – 1) num determinado número de passos. Em cada passo o gradiente baseado no algoritmo de optimização é usado até convergir, sendo este processo útil em vários tipos de problemas.

## Capítulo 4. Aplicações, Resultados e Validação

### 4.1. Introdução

Nos capítulos anteriores introduziu-se a formulação matemática, a metodologia e implementação utilizadas em problemas de Optimização de Topologia.

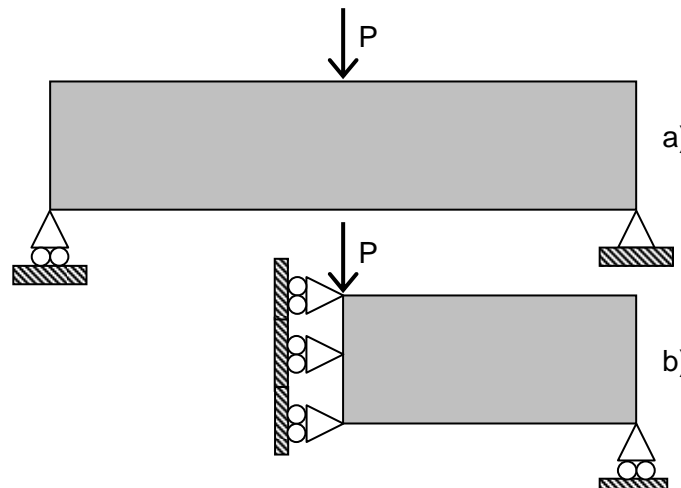
Neste capítulo apresentam-se diversos exemplos que servem de teste e validação da metodologia de resolução de problemas de optimização topológica. É estudada a influência de parâmetros, tais como o coeficiente de controlo de perímetro  $r_{\min}$  e o coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias  $p$ , no processo de optimização.

### 4.2. Aplicações

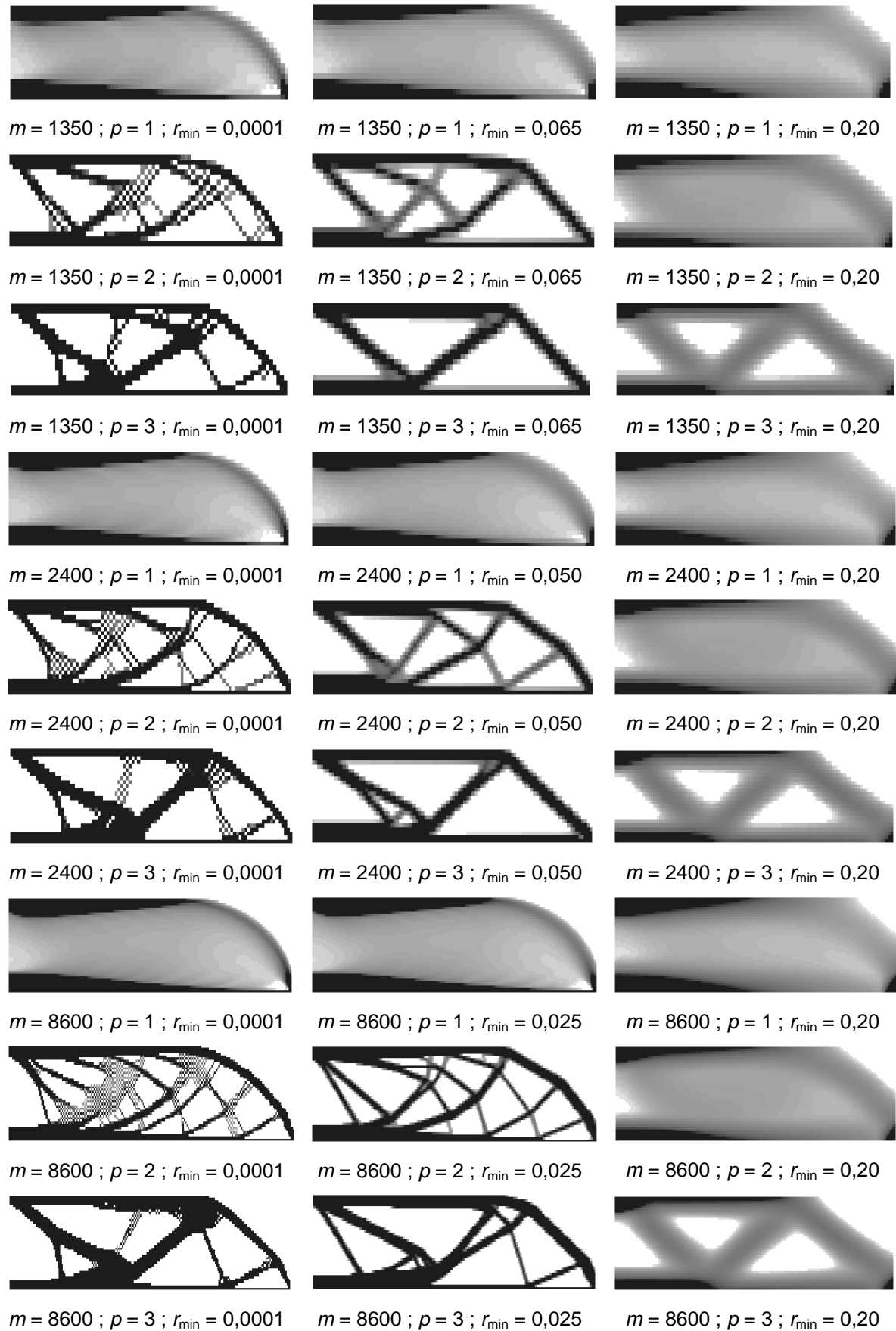
#### 4.2.1. Viga Bi-apoiada

Neste exemplo faz-se a análise de uma viga bi-apoiada. A figura 4.1 apresenta a geometria, condições de fronteira e carregamento para este problema. A dimensão da viga é 6x1 m. A força aplicada é  $P = 10$  kN, o material tem um módulo de Young de 200GPa e coeficiente de Poisson de 0.3. No processo de optimização foram utilizadas 200 iterações e o constrangimento de volume é de 40% do volume total.

Na figura 4.2 podem observar-se os resultados da viga bi-apoiada após optimização topológica.



**Figura 4.1: Viga bi-apoiada: a) domínio completo; b) metade do domínio com condições de simetria**

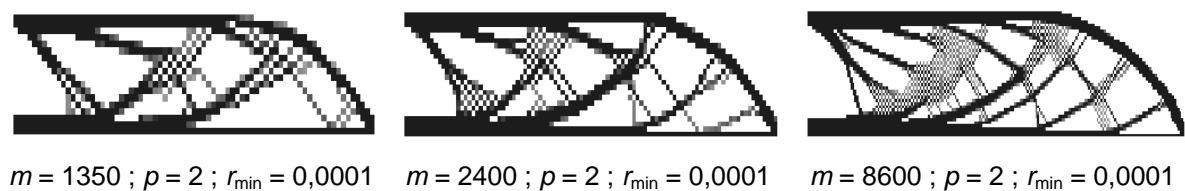


**Figura 4.2: Resultados da viga bi-apoiada após otimização topológica. Somente é representado metade do domínio**

Conforme pode observar-se na figura 4.2, no processo de optimização topológica foram realizados ensaios para:

- 3 malhas de elementos finitos ( $m$ ): 1350, 2400 e 8600 elementos;
- 3 coeficientes de penalização de densidades relativas intermédias ( $p$ ): 1, 2 e 3;
- 3 valores para o coeficiente de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ): 0,0001;  $r_{\min}$  médio consoante a malha de elementos finitos e 0,20. O  $r_{\min}$  médio é a média da distância do elemento aos elementos que estão na sua vizinhança.

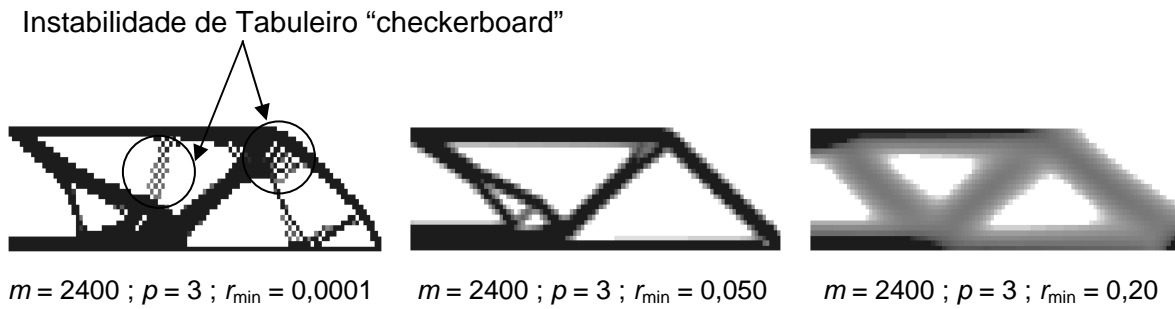
Ao analisar os resultados do processo de optimização da figura 4.2 podem observar-se alguns dos problemas de implementação referidos no capítulo 3.4. Na figura 4.3 pode observar-se o problema da dependência da malha. Ao aumentar a discretização da malha obtém-se um elemento com estrutura mais complexa e com uma topologia mais detalhada e qualitativamente diferente do modelo resultante de uma malha mais grosseira. Assim podemos concluir que diferentes discretizações da malha de elementos finitos não geram qualitativamente a mesma solução. Nem sempre uma malha mais refinada gera uma topologia óptima da estrutura.



**Figura 4.3: Variação da discretização da malha: Problema de dependência da malha**

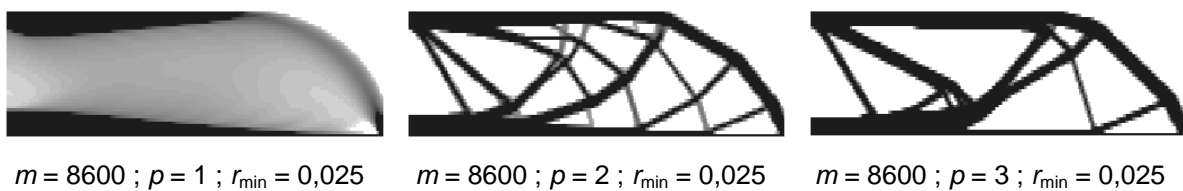
Na figura 4.4 (assim como na figura 4.3) pode observar-se o problema da instabilidade de tabuleiro “checkerboard”. No 1º caso vemos claramente regiões onde elementos com e sem material (pretos e brancos) se alternam entre elementos vizinhos, criando um padrão similar ao tabuleiro de xadrez. Ao utilizar-se um valor para o filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ) adequado, as zonas xadrez tendem a desaparecer. Este valor, que é utilizado para evitar o problema do “checkerboard”, deve ser adequado a cada situação e depende da malha utilizada. Se forem utilizados valores muito baixos pode ocorrer “checkerboard”. Se forem utilizados valores muito altos influencia-se a solução do problema de optimização, podendo não haver convergência do mesmo. Desta forma deve-se analisar o tamanho dos elementos discretizados de forma a atribuir o valor correcto para o filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ), conforme já descrito na secção 3.4.2.





**Figura 4.4: Variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ): Problema da Instabilidade de Tabuleiro “checkerboard”**

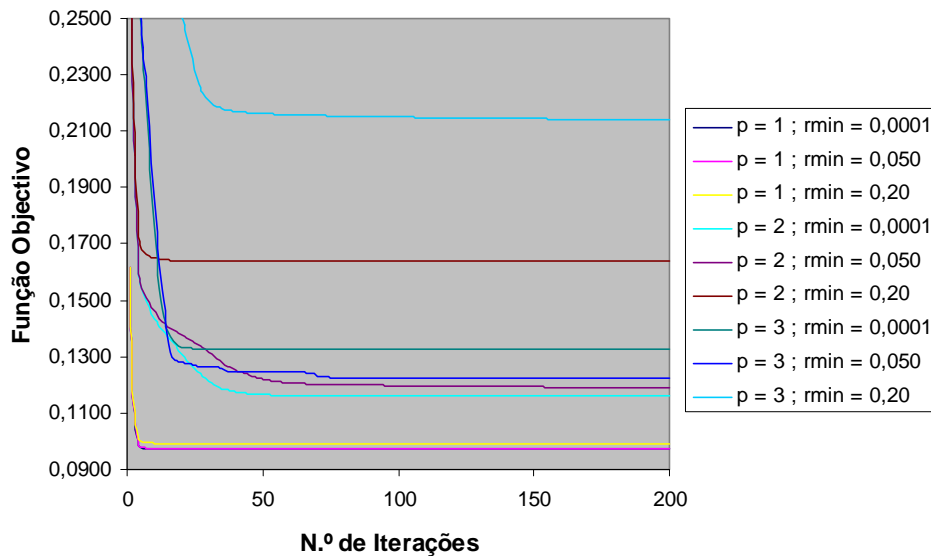
Na figura 4.5 podem observar-se as diferentes topologias que resultam da variação do coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias ( $p$ ) no processo de optimização topológica. Para o caso onde  $p = 1$  a solução contém grandes áreas cinza (áreas com densidade intermédia) que não configuram uma topologia final aceitável. Ao aumentar o coeficiente de penalidade para  $p = 2$  obtém-se uma estrutura onde se distinguem áreas pretas (com material) e brancas (sem material). Ao escolher-se o coeficiente de penalidade  $p = 3$  obtém-se uma solução final com regiões quase inteiramente sólidas ou vazias. Se o coeficiente de penalidade for aumentado para valores muito elevados a solução final irá degenerar devido à convergência prematura da solução. Desta forma, as soluções encontradas mostram que variando o coeficiente de penalidade vão-se obter estruturas com topologias bastante diferentes.



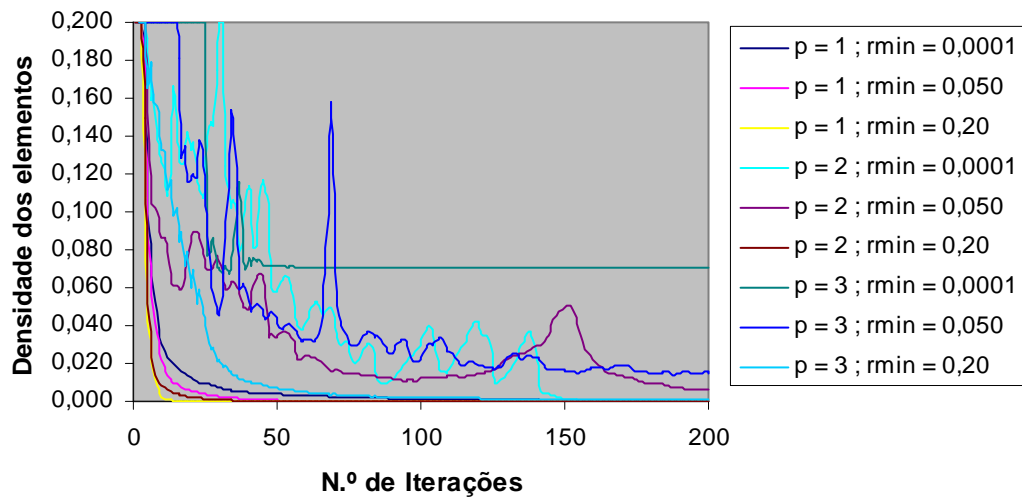
**Figura 4.5: Variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ )**

Na figura 4.6 pode observar-se como varia a função objectivo ao longo das iterações. Ao analisar o gráfico pode verificar-se que nos diversos casos a função objectivo converge. O coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias ( $p$ ) provoca uma convergência para uma função objectivo de valor superior. Quanto maior é a influência do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ) pior é o valor final da função objectivo.

Na figura 4.7 pode observar-se como varia a densidade dos elementos ao longo das iterações. Ao analisar o gráfico pode verificar-se que ao aumentar o coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias ( $p$ ) existe maior oscilação na densidade dos elementos. Isto ocorre pois ao introduzir-se um valor ( $p$ ) passa-se de um sistema linear para um sistema não linear onde a convergência é mais difícil (ver figura 2.2).



**Figura 4.6: Gráfico da variação da função objectivo com o número de iterações**

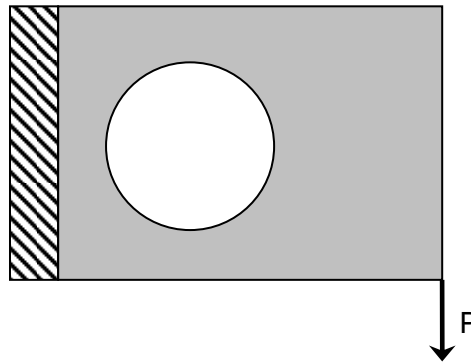


**Figura 4.7: Gráfico da variação da densidade dos elementos com o número de iterações**

Os resultados aqui obtidos foram os esperados e são similares a resultados provenientes de literatura especializada. Pode observar-se este facto ao analisar os resultados obtidos por Bendsøe e Sigmund [4], C. Pedersen e T. Buhl [20], entre outros.

#### 4.2.2. Viga com Furo Fixo

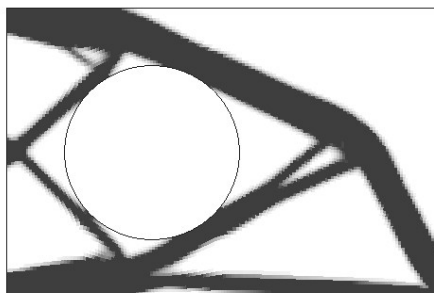
Neste exemplo faz-se a análise de uma viga com um furo fixo. A figura 4.8 apresenta a geometria, condições de fronteira e carregamento para este problema. A dimensão da viga é 3x2 m e o furo tem diâmetro de 1,2 m. A força aplicada é  $P = 5$  kN, e o material tem um módulo de Young de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0.3.



**Figura 4.8: Viga com furo fixo: Geometria, carregamento e condições de fronteira**

No processo de otimização foram utilizadas 100 iterações, um coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias  $p = 3$  e um valor para o filtro de controlo de perímetro  $r_{\min} = 0,045$ . A viga foi dividida numa malha de elementos finitos estruturada contendo 11406 elementos. O constrangimento de volume é de 40% do volume total.

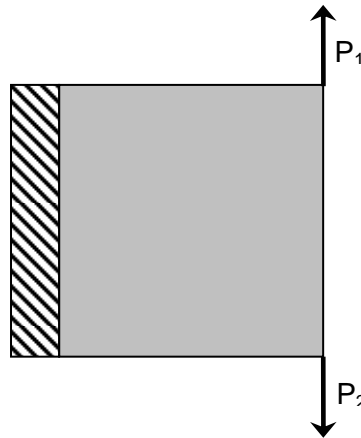
Na figura 4.9 pode observar-se a viga após o processo de otimização. Pode constatar-se que na zona do furo não existe material, como seria de esperar, sendo este distribuído ao redor do furo, dentro do domínio de projecto. A utilização de regiões contendo furos é implementada de forma simples no processo de otimização topológica. Os resultados aqui obtidos foram os esperados e são similares a resultados provenientes de literatura especializada. Pode observar-se este facto ao analisar os resultados obtidos por Bendsøe e Sigmund [4].



**Figura 4.9: Viga com furo fixo após otimização**

### 4.2.3. Viga com Cargas Múltiplas

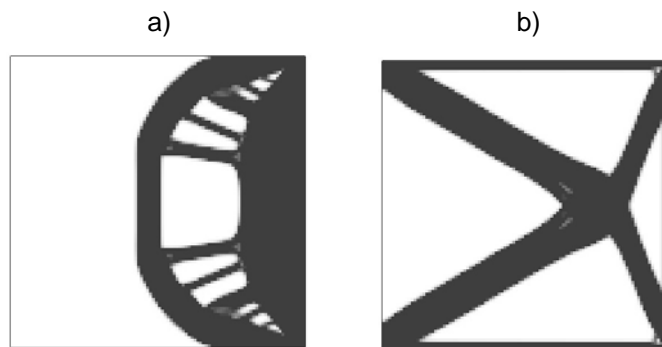
Neste exemplo faz-se a análise de uma viga com cargas múltiplas. A figura 4.10 apresenta a geometria, condições de fronteira e carregamento para este problema. A dimensão da viga é 2x2 m. A força aplicada é  $P_1 = P_2 = 1$  kN, e o material tem um módulo de Young de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0.3.



**Figura 4.10: Viga com cargas múltiplas: Geometria, carregamento e condições de fronteira**

No processo de otimização foram utilizadas 100 iterações, o coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias  $p = 3$  e o valor para o filtro de controlo de perímetro  $r_{\min} = 0,025$ . A viga foi dividida numa malha de elementos finitos estruturada contendo 10000 elementos. O constrangimento de volume é de 40% do volume total.

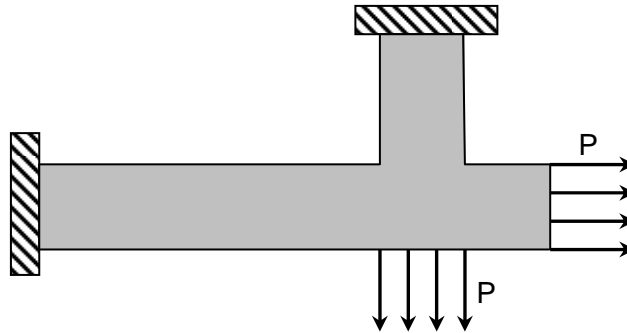
Na figura 4.11 pode observar-se a viga após o processo de otimização. Pode observar-se que o resultado final da topologia é diferente no caso de aplicar-se as forças em simultâneo ou separadamente. Os resultados aqui obtidos foram os esperados e são similares a resultados provenientes de literatura especializada. Pode observar-se este facto ao analisar os resultados obtidos por Bendsøe e Sigmund [4].



**Figura 4.11: a) Viga após otimização com cargas  $P_1$  e  $P_2$  aplicadas em simultâneo;  
b) Viga após otimização com cargas  $P_1$  e  $P_2$  aplicadas separadamente**

#### 4.2.4. Estrutura Bi-constrangida

Neste exemplo faz-se a análise de uma estrutura bi-constrangida sujeita a cargas múltiplas. A figura 4.12 apresenta a geometria, condições de fronteira e carregamento para este problema. A dimensão da estrutura é 10x5 m. A força aplicada é  $P = 10$  kN, e o material tem um módulo de Young de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0.3.



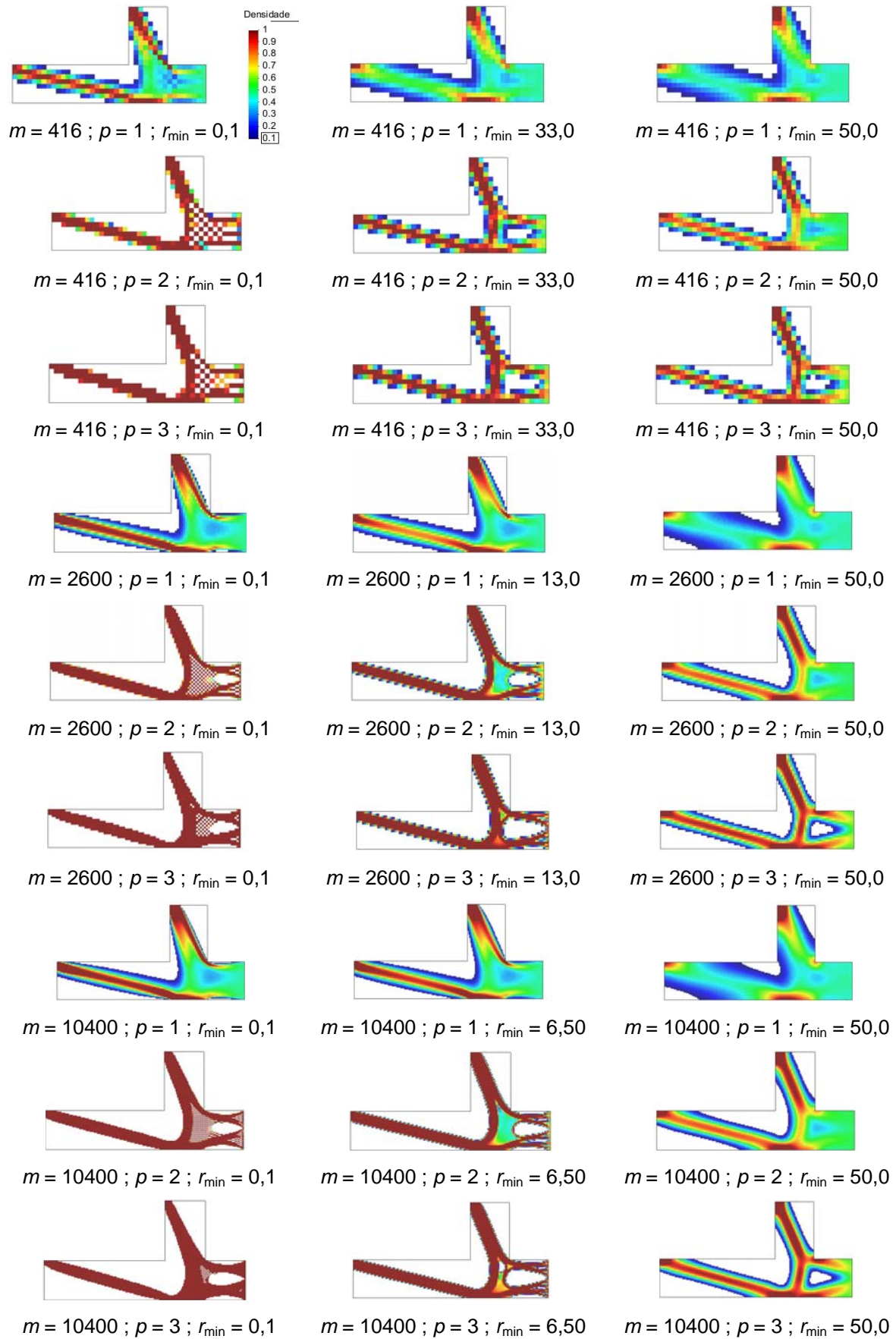
**Figura 4.12: Estrutura bi-constrangida: Geometria, carregamento e condições de fronteira**

No processo de otimização foram utilizadas 100 iterações e o constrangimento de volume é de 40% do volume total. Foram realizados ensaios para:

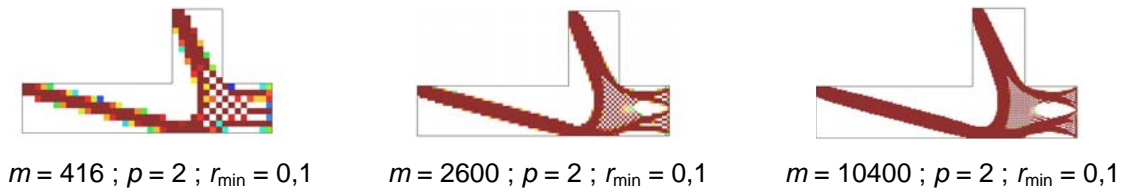
- 3 malhas de elementos finitos ( $m$ ): 416, 2600 e 10400 elementos;
- 3 coeficientes de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ ): 1, 2 e 3;
- 3 valores para o filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ): 0,1;  $r_{\min}$  médio consoante a malha de elementos finitos e 50,0.

Na figura 4.13 podem observar-se os resultados da estrutura bi-constrangida após otimização topológica. Ao analisar os resultados do processo de otimização na figura 4.13 podem observar-se alguns dos problemas de implementação referidos no capítulo 3.4.

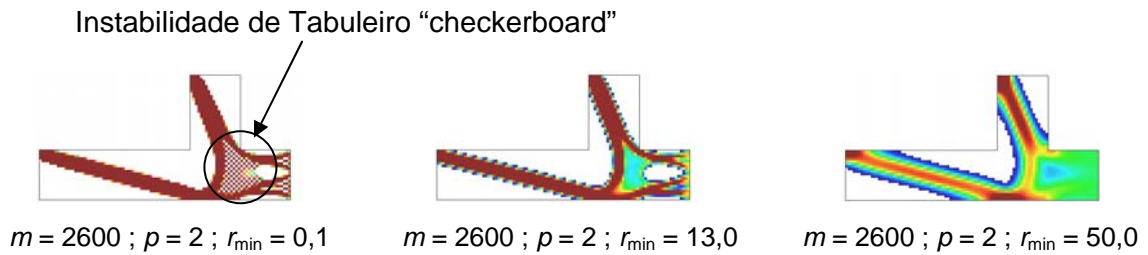
Na figura 4.14 pode observar-se o problema da dependência da malha. Neste caso ao aumentarmos a discretização da malha obtém-se um elemento com estrutura mais detalhada do que com uma malha mais grosseira. Na figura 4.15 pode observar-se o problema da instabilidade de tabuleiro “checkerboard”. No 1º caso vê-se claramente regiões onde elementos com e sem material se alternam entre elementos vizinhos, criando um padrão similar ao tabuleiro de xadrez. Ao utilizar-se um valor para o filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ) adequado, as zonas xadrez tendem a desaparecer.



**Figura 4.13: Resultados da estrutura bi-constrangida após otimização topológica**

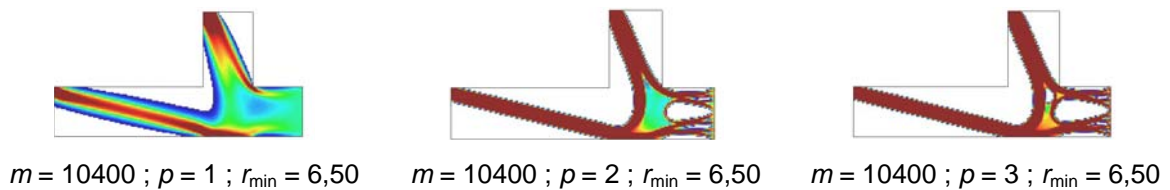


**Figura 4.14: Variação da discretização da malha: Problema de dependência da malha**



**Figura 4.15: Variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ): Problema da Instabilidade de Tabuleiro "checkerboard"**

Na figura 4.16 podem observar-se as diferentes topologias que resultam da variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ ) no processo de optimização topológica. Para o caso onde  $p = 1$  a solução contém grandes áreas com densidade intermédia que não configuram uma topologia final aceitável. Ao aumentar o coeficiente de penalidade essas áreas intermédias vão diminuindo, tornando mais clara a topologia final da estrutura.

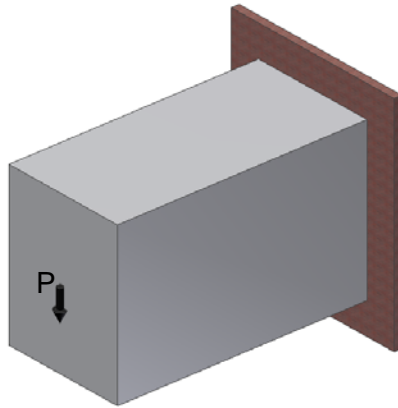


**Figura 4.16: Variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ )**

Os resultados aqui obtidos estão coerentes com os resultados provenientes de literatura especializada como, por exemplo, [4].

#### 4.2.5. Viga Encastrada Tridimensional

Neste exemplo faz-se a análise de uma viga encastrada tridimensional. A figura 4.17 apresenta a geometria, condições de fronteira e carregamento para este problema. As dimensões da viga são 1,6x1,0x0,8 m. A força aplicada é  $P = 10$  kN, e o material tem um módulo de Young de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0.3.



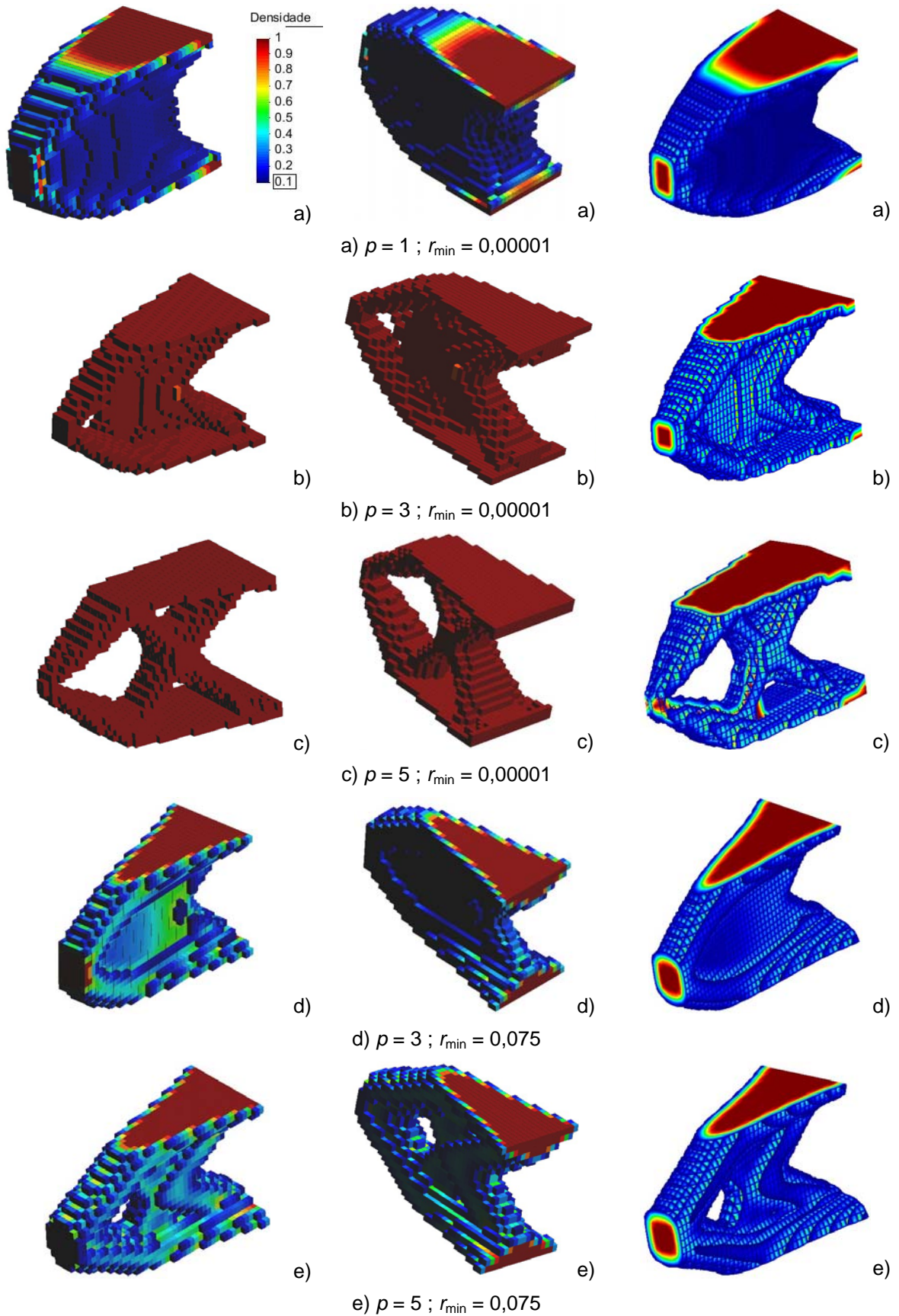
**Figura 4.17: Viga Encastrada Tridimensional: Geometria, carregamento e condições de fronteira**

No processo de otimização foram utilizadas 200 iterações, o coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias  $p = 1, 3$  e  $5$ , e o valor para o filtro de controlo de perímetro  $r_{\min} = 0,00001$  e  $0,075$ . O modelo de elementos finitos para este exemplo consiste em 16000 elementos sólidos isoparamétricos de 8 nós. No entanto, devido à simetria do problema analisou-se apenas metade da estrutura, sendo a viga dividida numa malha de elementos finitos contendo apenas 8000 elementos. O constrangimento de volume é de 20% do volume total.

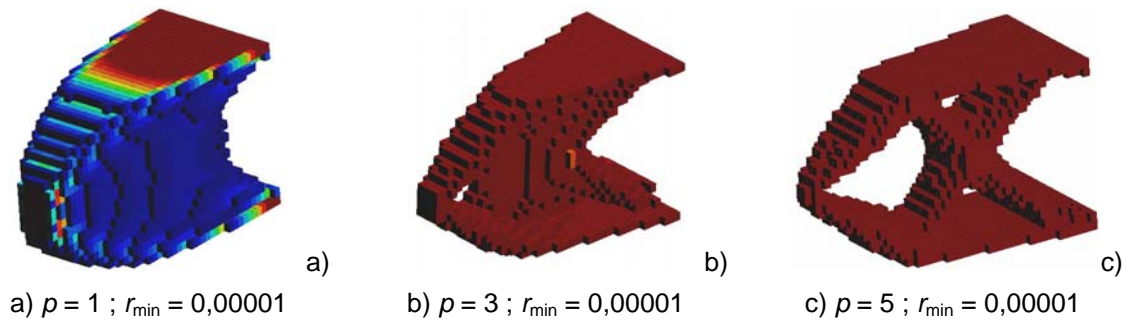
Na figura 4.18 podem observar-se os resultados da viga encastrada tridimensional após otimização topológica. Na figura 4.19 podem observar-se as diferentes topologias que resultam da variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ ) no processo de otimização topológica. Para o caso onde  $p = 1$  a solução contém grandes áreas com densidade intermédia que não configuram uma topologia final aceitável. Ao aumentarmos o coeficiente de penalidade essas áreas intermédias vão diminuindo, tornando mais clara a topologia final da estrutura.

Na figura 4.20 podem observar-se as diferentes topologias que resultam da variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ) no processo de otimização topológica. Este filtro é utilizado para evitar o aparecimento de zonas xadrez (com e sem material).

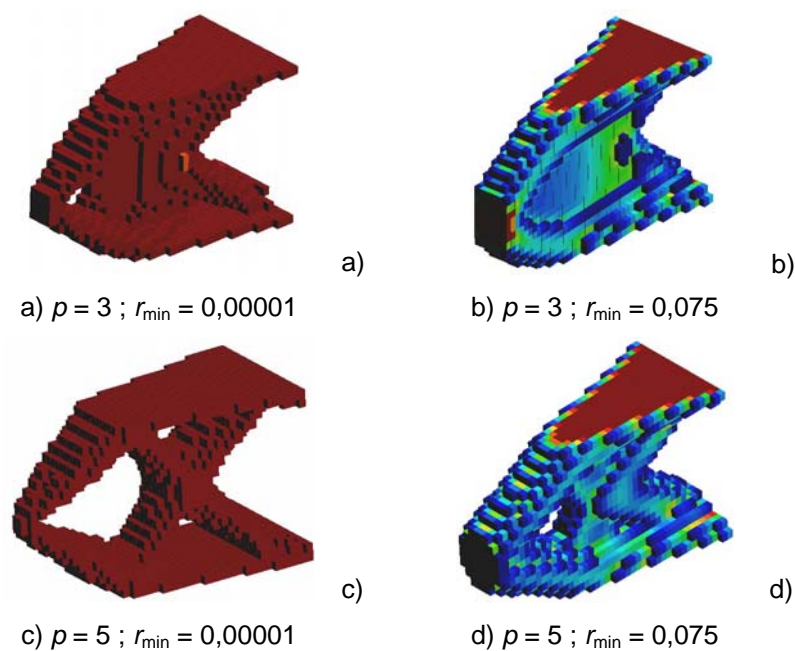




**Figura 4.18: Resultados da viga encastrada tridimensional após otimização topológica: à esquerda as vistas centrais da estrutura; ao centro as vistas posteriores da estrutura; à direita as vistas centrais da estrutura suavizada (estrutura obtida através de interpolação entre os nós)**



**Figura 4.19: Variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ )**



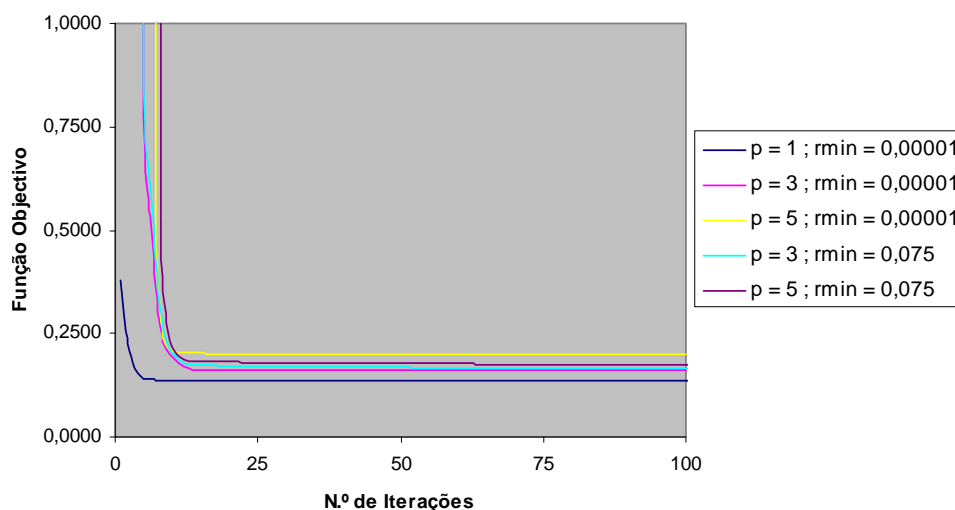
**Figura 4.20: Variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ )**

Quando não se considera o controlo de perímetro nem a penalização das densidades relativas intermédias, a topologia final apresenta uma grande quantidade de material intermédio. Quando a penalização das densidades relativas intermédias é introduzida este material intermédio é praticamente eliminado, surgindo uma estrutura bem definida. Quando se introduz o filtro de controlo de perímetro aparecem na estrutura zonas com densidades relativas intermédias, o que indica que o valor para o ( $r_{\min}$ ) não foi o mais adequado para este caso. Normalmente a combinação entre ( $p$ ) e ( $r_{\min}$ ) adequados permitem eliminar tanto o material intermédio como as zonas de xadrez.

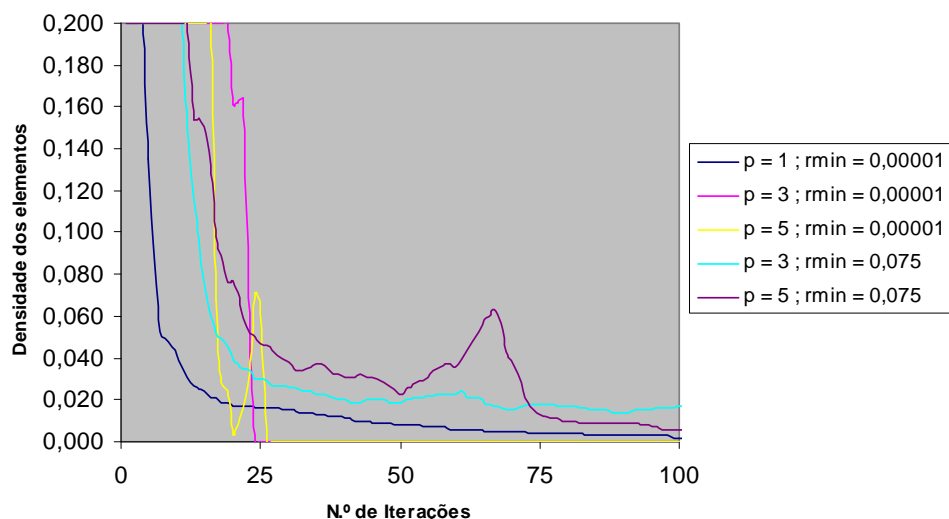
Na figura 4.21 pode observar-se como varia a função objectivo ao longo das iterações. Ao analisar o gráfico pode verificar-se que nos diversos casos a função

objectivo converge. O coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias ( $p$ ) provoca uma convergência para uma função objectivo de valor superior.

Na figura 4.22 pode observar-se como varia a densidade dos elementos ao longo das iterações. Ao analisar o gráfico pode verificar-se que ao aumentar o coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias ( $p$ ) existe maior oscilação na densidade dos elementos.



**Figura 4.21: Gráfico da variação da função objectivo com o número de iterações**

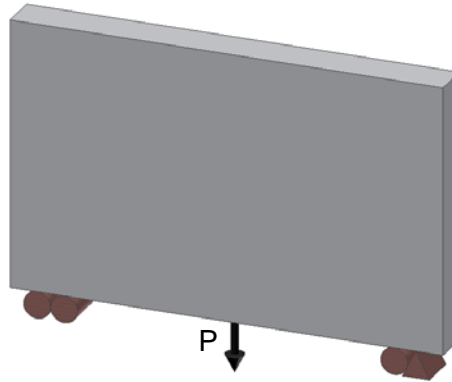


**Figura 4.22: Gráfico da variação da densidade dos elementos com o número de iterações**

Os resultados aqui obtidos foram comparados com os resultados provenientes de literatura especializada. Pode observar-se este facto ao analisar os resultados obtidos por P. Fernandes [9].

#### 4.2.6. Placa Tridimensional

Neste exemplo faz-se a análise de uma placa tridimensional. A figura 4.23 apresenta a geometria, condições de fronteira e carregamento para este problema. As dimensões da placa são 8,0x5,0x0,75 m. A força aplicada é  $P = 180$  kN, e o material tem um módulo de Young de 210 GPa e coeficiente de Poisson de 0.3.



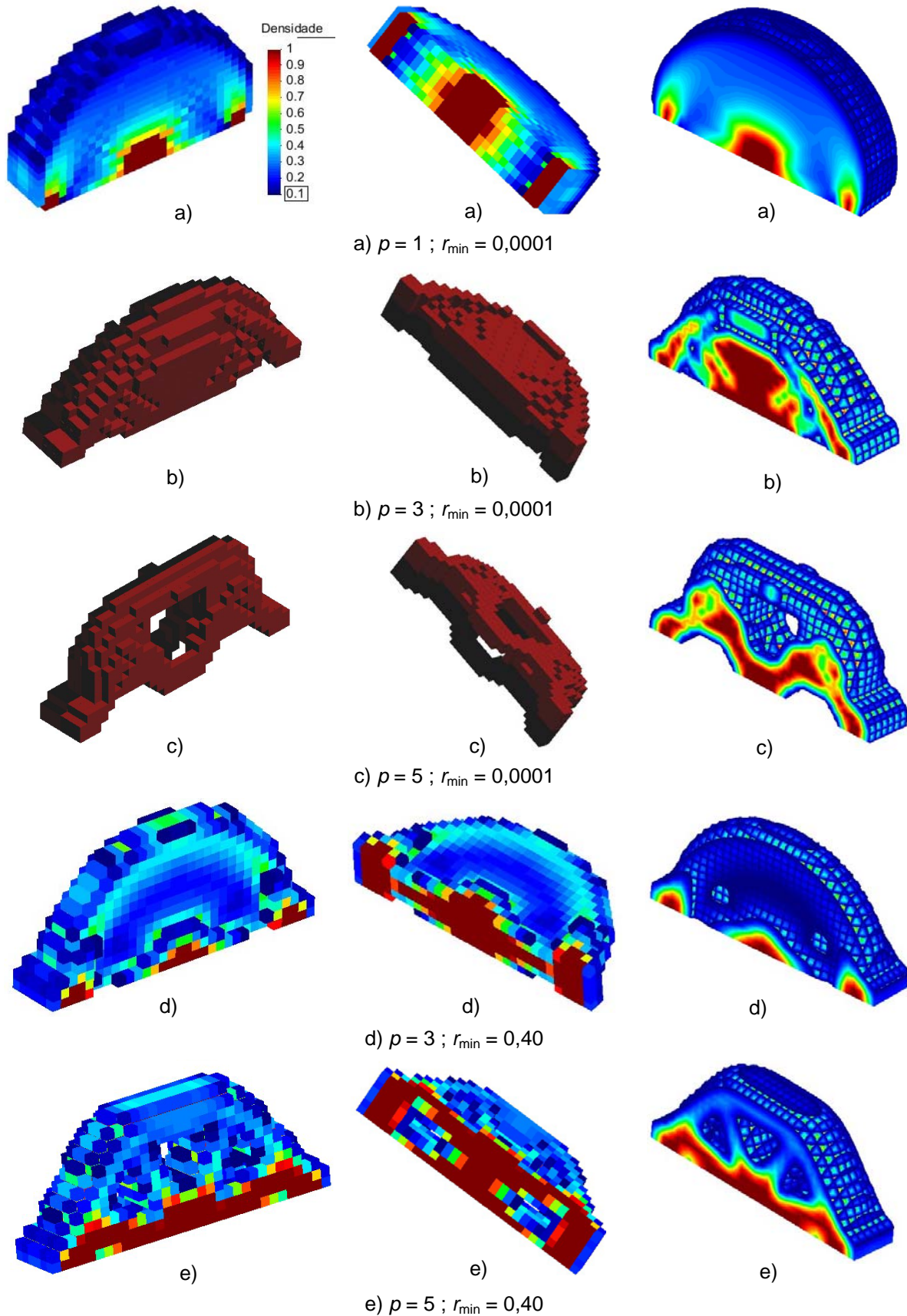
**Figura 4.23: Placa Tridimensional: Geometria, carregamento e condições de fronteira**

No processo de otimização foram utilizadas 200 iterações, o coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias  $p = 1, 3$  e  $5$ , e o valor para o filtro de controlo de perímetro  $r_{\min} = 0,0001$  e  $0,40$ . O modelo de elementos finitos para este exemplo consiste em 3840 elementos sólidos isoparamétricos de 8 nós. No entanto, devido à simetria do problema, analisou-se apenas metade da estrutura, sendo a placa dividida numa malha de elementos finitos contendo apenas 1920 elementos. O constrangimento de volume é de 25% do volume total.

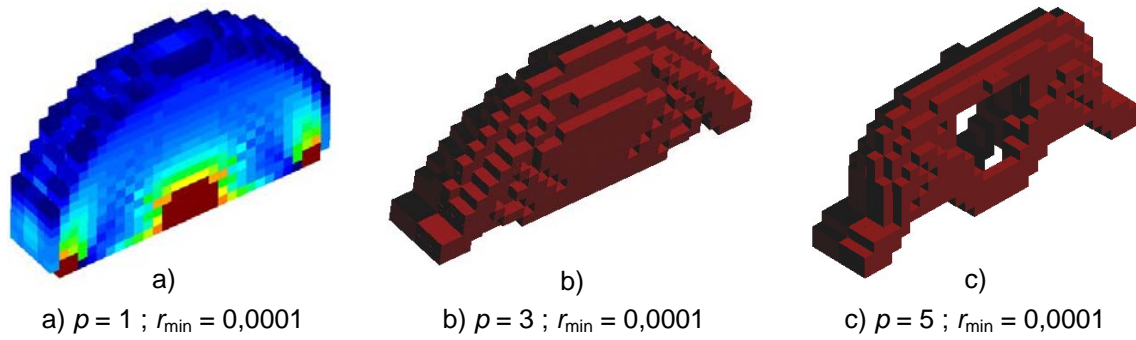
Na figura 4.24 podem observar-se os resultados da placa tridimensional após optimização topológica. Na figura 4.25 podem observar-se as diferentes topologias que resultam da variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ ) no processo de optimização topológica. Para o caso onde  $p = 1$  a solução contém grandes áreas com densidade intermédia que não configuram uma boa topologia final. Ao aumentarmos o coeficiente de penalidade essas áreas intermédias vão diminuindo, tornando mais clara a topologia final da estrutura.

Na figura 4.26 podem observar-se as diferentes topologias que resultam da variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ) no processo de optimização topológica. Conforme já referido anteriormente, este filtro é utilizado para evitar o aparecimento de zonas xadrez (com e sem material).

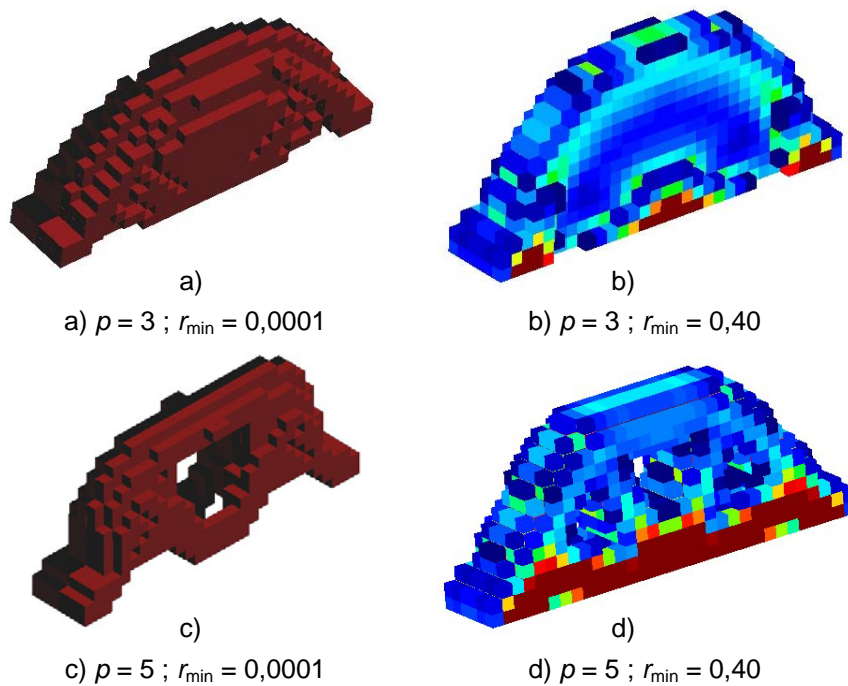




**Figura 4.24:** Resultados da placa tridimensional após otimização topológica: na coluna da esquerda podem observar-se as vistas centrais da estrutura com representação dos elementos; na coluna do centro as vistas de baixo da estrutura com representação dos elementos; na coluna da direita as vistas centrais da estrutura com interpolação entre os nós



**Figura 4.25: Variação do coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias ( $p$ )**



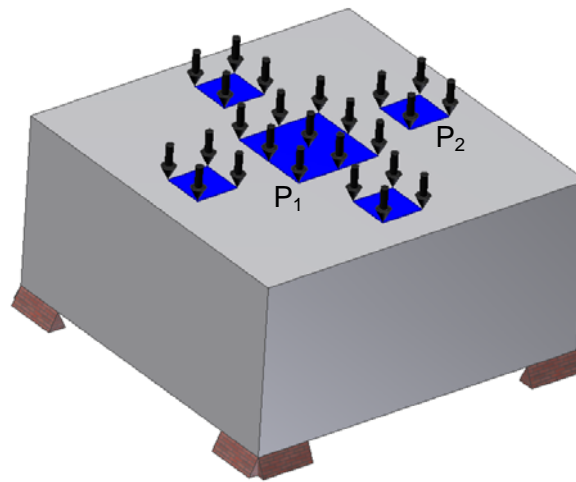
**Figura 4.26: Variação do filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ )**

Neste exemplo, pode mais uma vez verificar-se o efeito da penalização das densidades relativas intermédias no controlo das zonas de material intermédio. A introdução do filtro de controlo de perímetro induz o aparecimento de zonas com densidades relativas intermédias, o que indica que o valor para o ( $r_{\min}$ ) não foi o mais adequado para este caso. Normalmente a combinação entre ( $p$ ) e ( $r_{\min}$ ) adequados permitem eliminar tanto o material intermédio como as zonas de xadrez.

Mais uma vez, os resultados aqui obtidos foram comparados a resultados provenientes de literatura especializada, [9].

#### 4.2.7. Bloco Tridimensional

Neste exemplo faz-se a análise de um bloco tridimensional. A figura 4.27 apresenta a geometria, condições de fronteira e carregamento para este problema. As dimensões do bloco são  $0,96 \times 0,96 \times 0,48$  m. Consideraram-se dois carregamentos,  $P_1 = 1$  MPa sobre uma área de  $1,44 \times 10^{-2} \text{ m}^2$  e  $P_2 = 1,4$  MPa sobre 4 áreas de  $0,36 \times 10^{-2} \text{ m}^2$  dispostas de forma simétrica. O material tem um módulo de Young de 210 GPa e coeficiente de Poisson de 0.3.



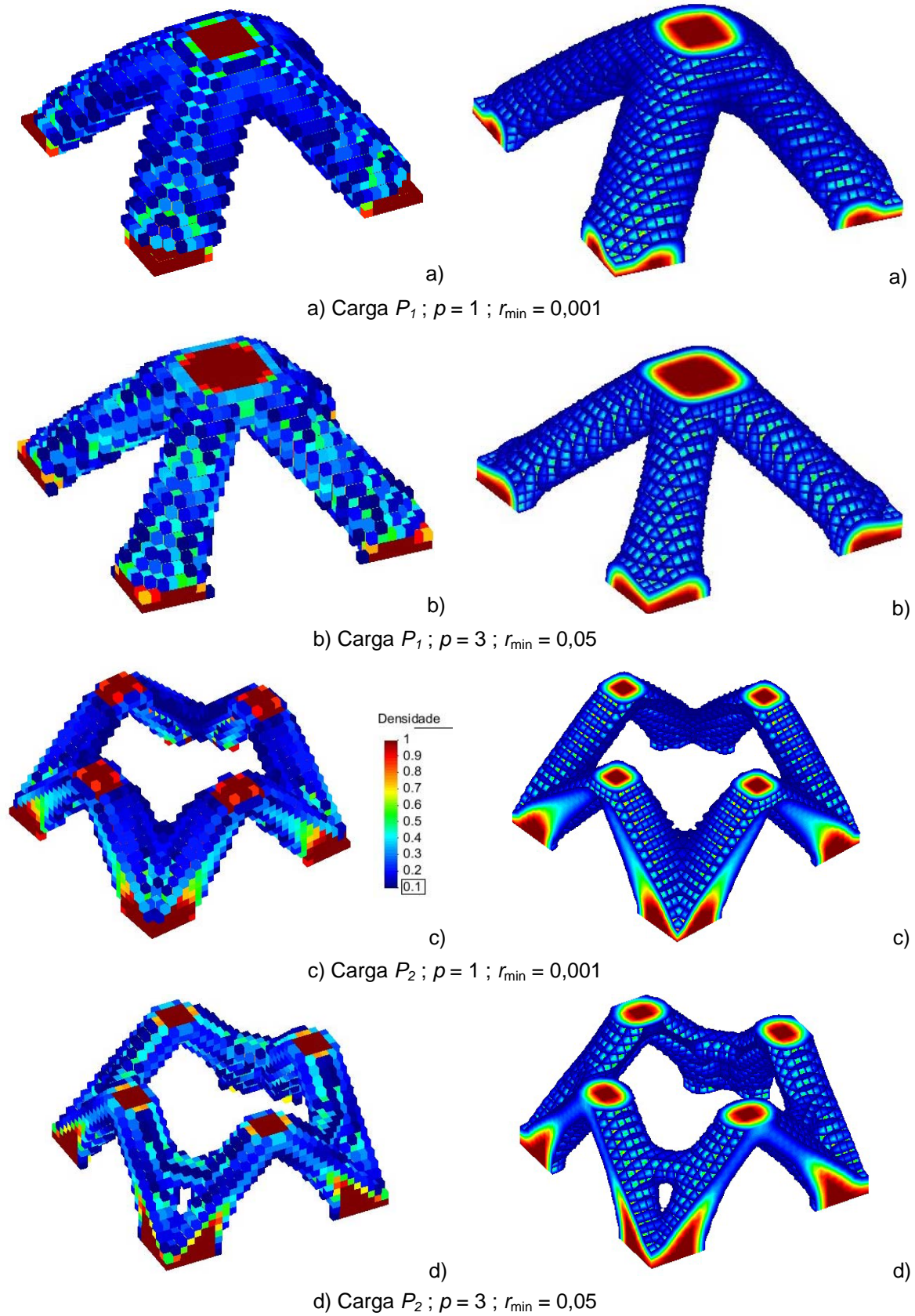
**Figura 4.27: Bloco Tridimensional: Geometria, carregamento e condições de fronteira**

No processo de otimização foram utilizadas 100 iterações, o coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias  $p = 1$  e 3, e o valor para o filtro de controlo de perímetro  $r_{\min} = 0,001$  e 0,05. O modelo de elementos finitos para este exemplo consiste em 16384 elementos sólidos isoparamétricos de 8 nós. No entanto, devido à simetria do problema, analisou-se apenas um quarto do domínio da estrutura, sendo o bloco dividido numa malha de elementos finitos contendo 4096 elementos. O constrangimento de volume é de 12,5% do volume total.

Na figura 4.28 podem observar-se os resultados do bloco tridimensional após optimização topológica para as cargas  $P_1$ ,  $P_2$ . Na figura 4.29 podem observar-se os resultados do bloco tridimensional após optimização topológica para um critério de cargas múltiplas.

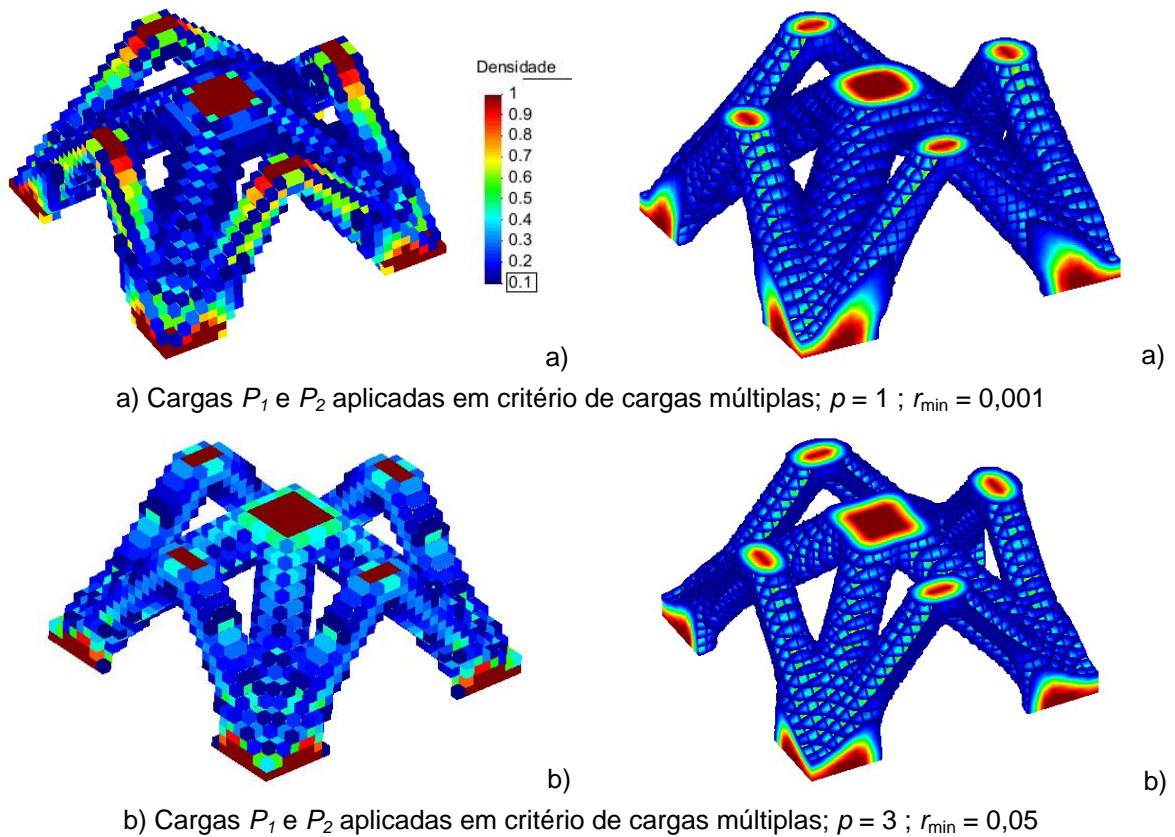
Os resultados mostram novamente que a solução obtida sem considerar penalização das densidades intermédias apresenta grande quantidade de material intermédio. Desta forma, ao aumentarmos o coeficiente de penalidade essas áreas intermédias vão diminuindo, tornando mais clara a topologia final da estrutura.





**Figura 4.28: Resultados do bloco tridimensional após otimização topológica para as cargas  $P_1$  e  $P_2$ : na coluna da esquerda podem observar-se as vistas centrais da estrutura com representação dos elementos; na coluna da direita podem observar-se as vistas centrais da estrutura com interpolação entre os nós**





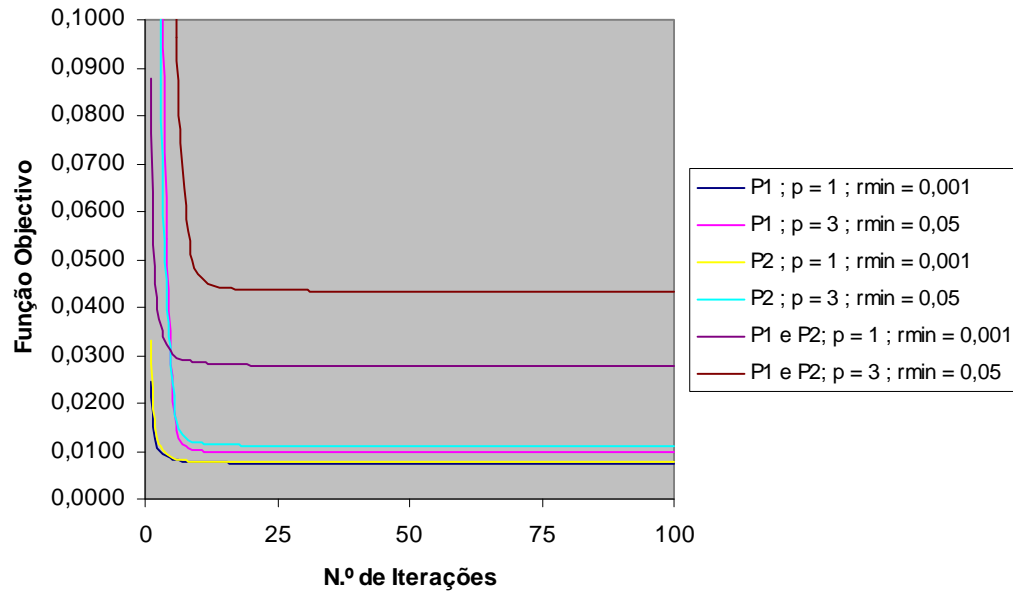
**Figura 4.29: Resultados do bloco tridimensional após optimização topológica para as cargas  $P_1$  e  $P_2$  aplicadas em critério de cargas múltiplas: na coluna da esquerda podem-se observar as vistas centrais da estrutura; na coluna da direita podem observar-se as vistas centrais da estrutura suavizada**

Este exemplo ilustra também a influência de se considerar um critério de cargas múltiplas. Verifica-se, ao utilizar este critério, que a solução obtida pelo modelo de optimização é uma solução de compromisso entre as soluções óptimas de cada caso de carga, quando considerados a actuar isoladamente. A utilização do critério de cargas múltiplas é fundamental no projecto de estruturas reais, pois normalmente as estruturas estão sujeitas a diferentes tipos de carregamento durante fases diferentes da sua vida. Com esta análise podemos estudar variadas estruturas sujeitas a diversos tipos de carregamento e verificar o comportamento destas às diversas solicitações a que estão sujeitas.

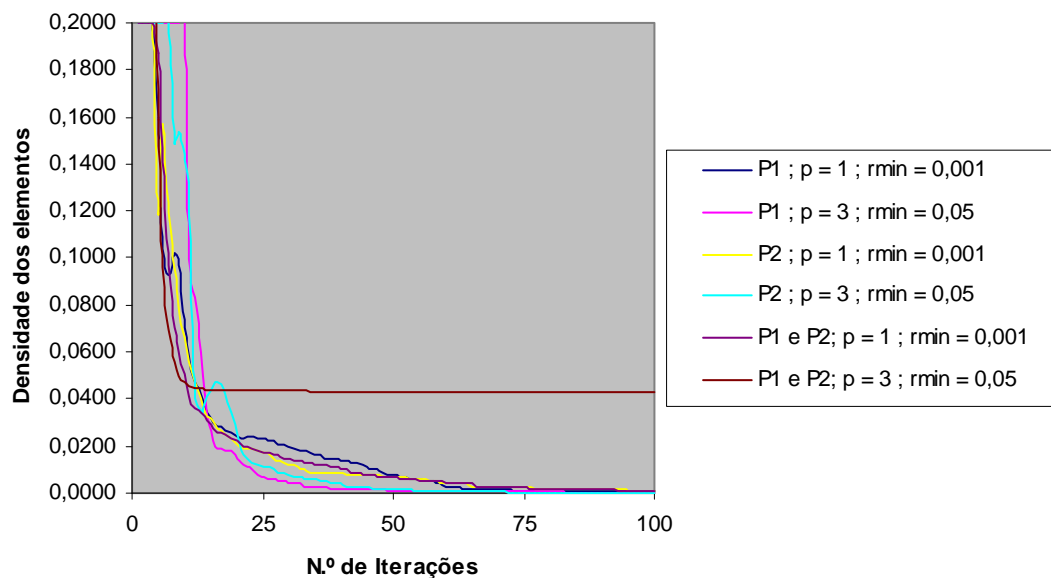
Na figura 4.30 pode observar-se como varia a função objectivo ao longo das iterações. Ao analisar o gráfico pode verificar-se que nos diversos casos a função objectivo converge. O coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias ( $p$ ) provoca uma convergência para uma função objectivo de valor superior. No caso das

cargas múltiplas o valor é superior às cargas separadas, visto a função objectivo ser a soma das duas cargas.

Na figura 4.31 pode observar-se como varia a densidade dos elementos ao longo das iterações.



**Figura 4.30: Gráfico da variação da função objectivo com o número de iterações**

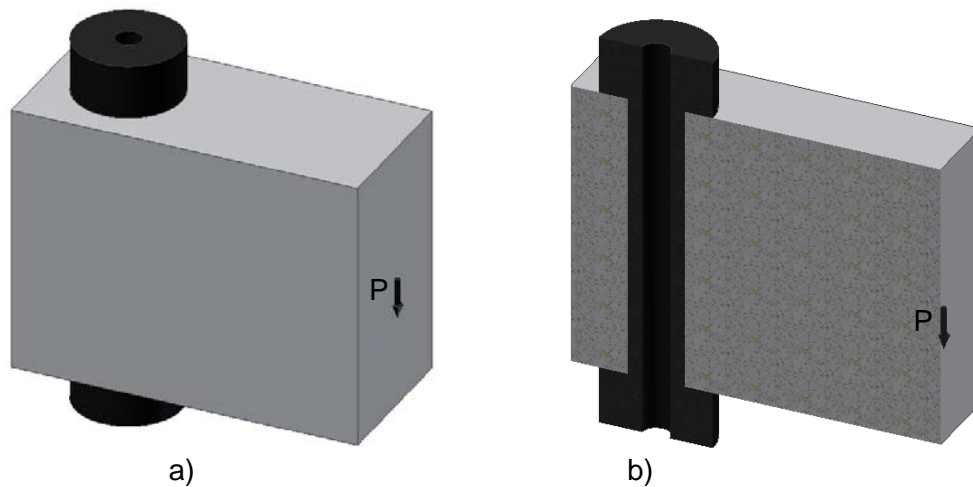


**Figura 4.31: Gráfico da variação da densidade dos elementos com o número de iterações**

Os resultados aqui obtidos foram os esperados e são similares a resultados provenientes de literatura especializada, [9].

#### 4.2.8. Suporte Cilíndrico

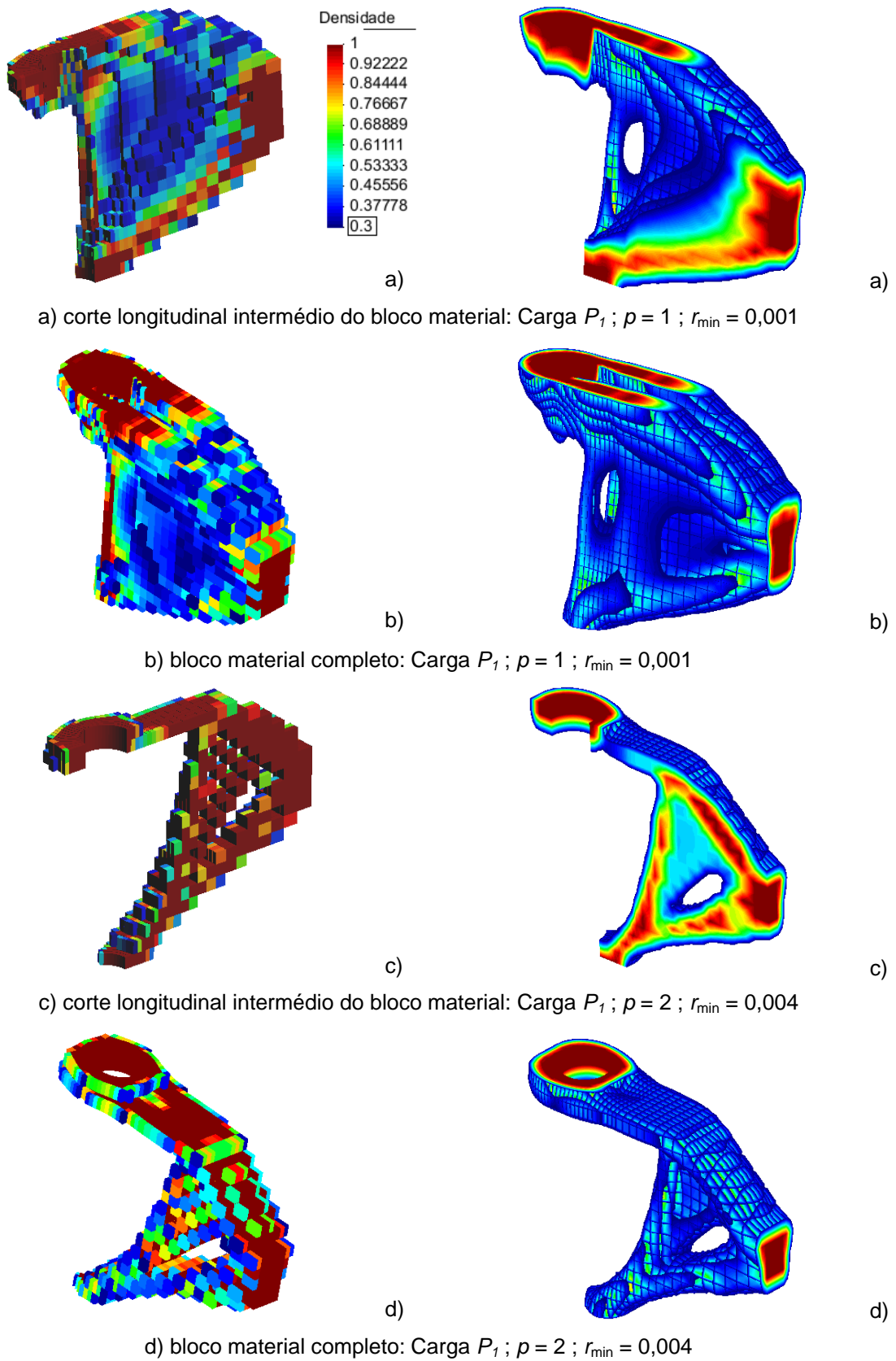
Neste exemplo modela-se a união de um bloco material a um suporte cilíndrico. A figura 4.32 apresenta a geometria, condições de fronteira e carregamento para este problema. As dimensões do bloco são 130x100x60 mm e o suporte cilíndrico tem diâmetro de  $\varnothing 20$  mm. O suporte cilíndrico é de aço, (módulo de Young de 210 GPa e coeficiente de Poisson de 0.3). O bloco é constituído por um material de base com propriedades idênticas ao aço. A carga aplicada no bloco tem o valor  $P = \pm 2$  kN.



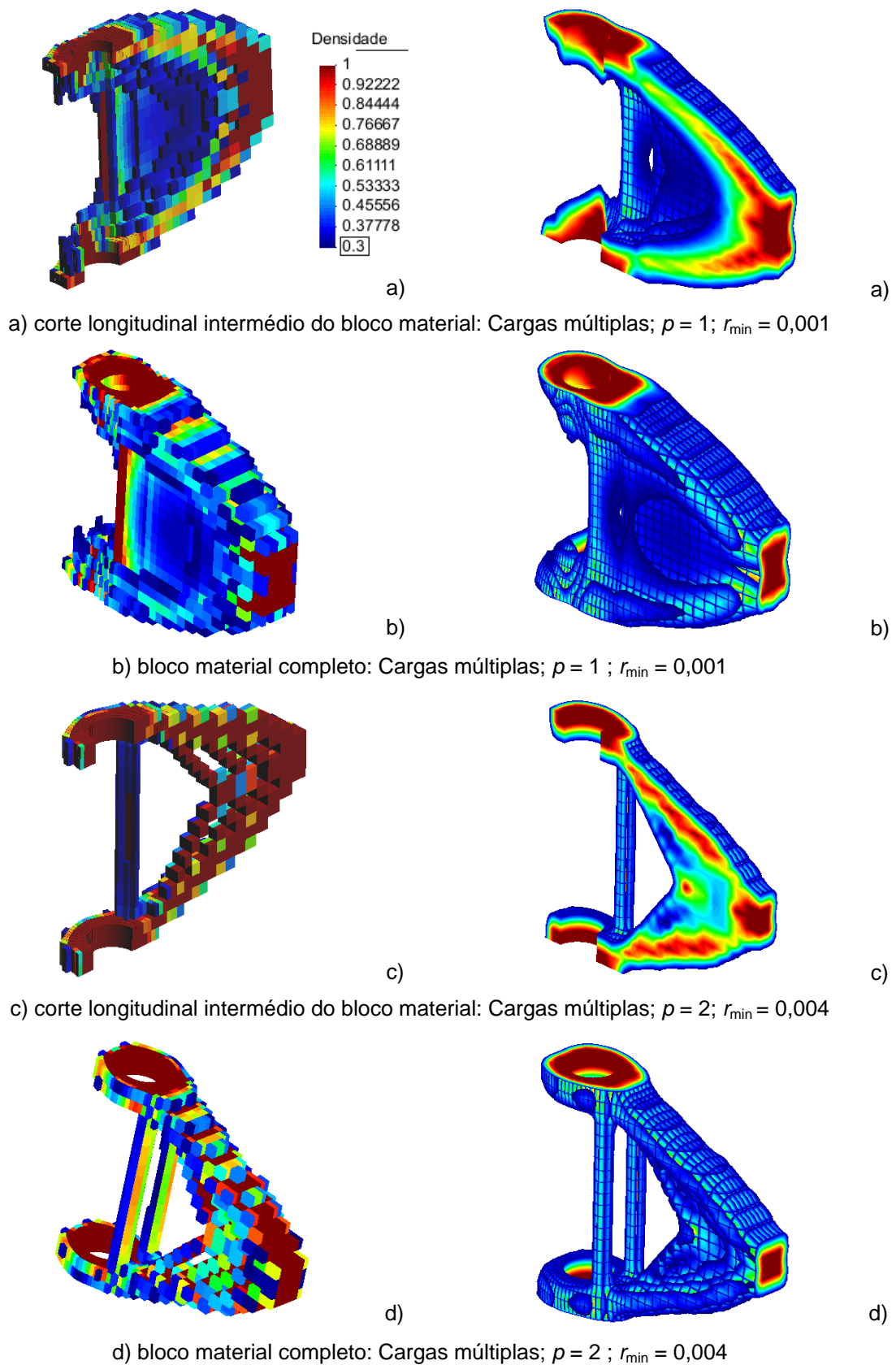
**Figura 4.32: a) Bloco material com suporte cilíndrico: Geometria, carregamento e condições de fronteira; b) corte efectuado no conjunto para melhor visualização**

No processo de optimização foram utilizadas 100 iterações, o coeficiente de penalidade das densidades relativas intermédias  $p = 1$  e 2, e o valor para o filtro de controlo de perímetro  $r_{\min} = 0,001$  e 0,004. Ambos os corpos são deformáveis, mas apenas o bloco é domínio de projecto. Por questões de modelação de elementos finitos o suporte cilíndrico é oco no seu interior, estando este fixo na sua superfície interior. Devido às condições de simetria apenas metade do conjunto, bloco – suporte, é modelado por elementos finitos. São utilizados 13812 elementos (11340 elementos de projecto). Os casos analisados consideram condição de contacto sem atrito entre o bloco e o suporte cilíndrico. O constrangimento de volume é de 15% do volume total.

Na figura 4.33 podem observar-se os resultados do bloco material após optimização topológica para a carga  $P_1$ . Na figura 4.34 podem observar-se os resultados do bloco material após optimização topológica para um critério de cargas múltiplas, em que se considera, para além da carga  $P_1$ , uma carga  $P_2$  de direcção e magnitude igual a  $P_1$ , mas de sentido oposto.

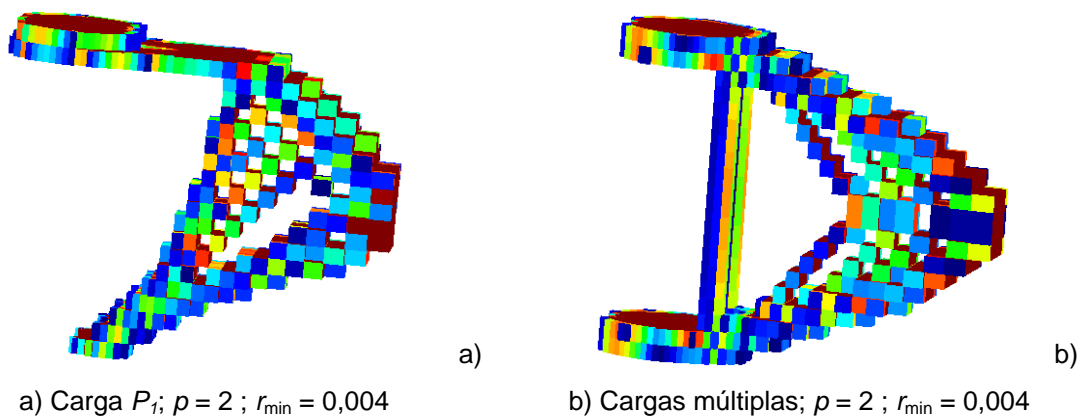


**Figura 4.33: Resultados do bloco material após optimização topológica para a carga  $P_1$ : na coluna da esquerda pode observar-se a representação dos elementos da estrutura; na coluna da direita pode observar-se a estrutura com interpolação entre os nós**



**Figura 4.34: Resultados do bloco material após optimização topológica para o critério de cargas múltiplas: na coluna da esquerda pode observar-se a representação dos elementos da estrutura; na coluna da direita pode observar-se a estrutura com interpolação entre os nós**

Na figura 4.35 pode observar-se o problema da instabilidade de tabuleiro “checkerboard”. No caso da carga  $P_1$  e no caso do critério de cargas múltiplas, vê-se claramente regiões onde elementos com e sem material se alternam entre elementos vizinhos, criando um padrão similar ao tabuleiro de xadrez. Nos 2 casos foram utilizados valores para o filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ), que no entanto não foram os adequados, pois as zonas xadrez não desapareceram. Como já referido anteriormente, ao utilizar-se um valor para o filtro de controlo de perímetro ( $r_{\min}$ ) adequado, as zonas xadrez tendem a desaparecer.



**Figura 4.35: Problema da Instabilidade de Tabuleiro “checkerboard”**

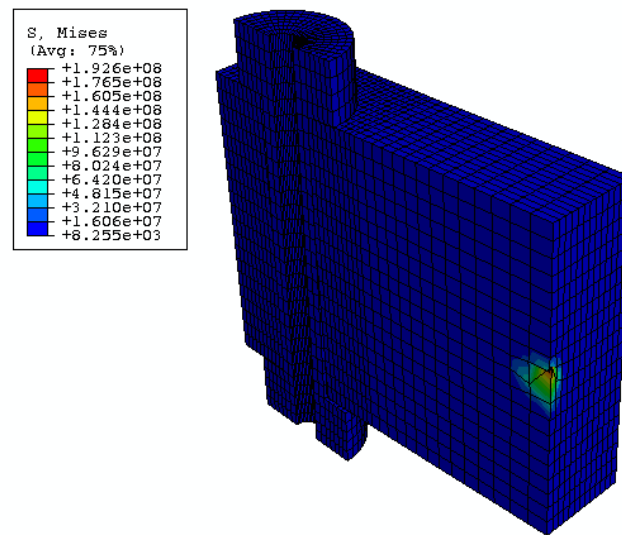
Os resultados mostram novamente que as soluções sem penalização das densidades intermédias apresentam extensas zonas de densidade intermédia, de difícil interpretação e definição do ponto de vista de fabrico, sendo evidente a importância de um método que conduza a soluções sem (ou com poucas) densidades intermédias. A penalização das densidades intermédias tem este efeito e ao aumentarmos o coeficiente de penalidade essas áreas intermédias vão diminuindo, tornando mais clara a topologia final da estrutura. Ao aumentarmos o factor de penalização de densidades estamos a forçar a obtenção de uma solução inteira através de um problema de optimização contínua com todas as dificuldades que lhe estão associadas de existência de solução e convergência. Pese embora as dificuldades acima referidas, a robustez do método de cálculo do multiplicador de Lagrange ficou demonstrada pois o constrangimento de volume foi sempre verificado dentro de margem de tolerância apertada.

As soluções obtidas, em particular as soluções com o coeficiente de penalização das densidades intermédias superior à unidade, mostram a aplicabilidade do método de optimização topológica de estruturas sujeitas a condições de contacto.

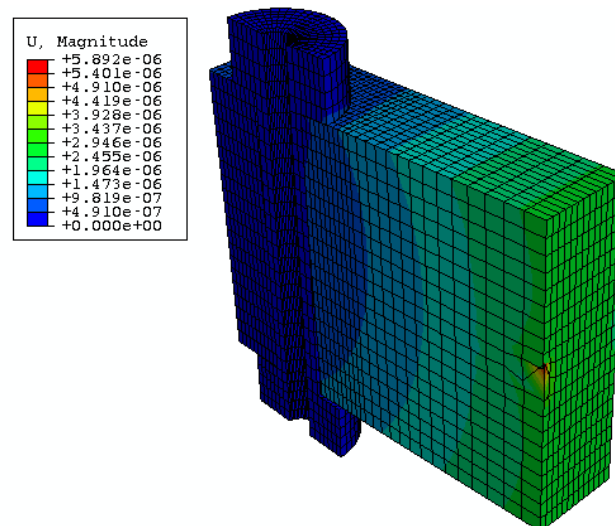


Na figura 4.36 podem observar-se as tensões de Von Mises nos pontos de integração. Como seria de esperar, o valor máximo para as tensões de Von Mises ocorre no ponto onde a força é aplicada. Pode ver-se que as tensões são inferiores à tensão limite de elasticidade do aço.

Na figura 4.37 pode observar-se o deslocamento espacial dos nós.



**Figura 4.36: Tensões de Von Mises nos pontos de integração (factor de escala:  $+2,377e^{+03}$ )**



**Figura 4.37: Deslocamento espacial dos nós (factor de escala:  $+2,377e^{+03}$ )**

Os resultados aqui obtidos foram os esperados e são similares a resultados provenientes de literatura especializada como, por exemplo, [10].

## Capítulo 5. Conclusões

O problema de Optimização Topológica tem como objectivo encontrar a melhor distribuição para uma dada quantidade de material no interior de um espaço de projecto predefinido, sob determinadas condições e cargas.

Este trabalho apresenta um método de optimização topológica para o caso da minimização da energia de deformação sujeita a um constrangimento de volume, as equações matemáticas que o definem e a sua implementação numérica. Neste trabalho também se apresenta o modelo computacional de optimização topológica e descreve-se de que forma ocorre o processo de optimização, desde a definição do problema até a visualização/análise dos resultados. A metodologia descrita foi implementada num programa chamado TopF que recorre ao programa ABAQUS® para a análise de elementos finitos. Os resultados são visualizados no pós-processador GID®.

Como testes de validação da metodologia de resolução de problemas de optimização topológica, foram executados diversos exemplos. Os resultados destes exemplos foram comparados com resultados provenientes de literatura especializada. Foi estudada a influência de parâmetros, tais como o coeficiente de controlo de perímetro  $r_{\min}$  e o coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias  $p$ , no processo de optimização. Analisaram-se os problemas de implementação numéricos, tais como, a dependência da malha e a instabilidade de tabuleiro “checkerboard”. Verificou-se também a convergência da função objectivo para os vários exemplos.

Na sua globalidade, os resultados obtidos confirmam a optimização topológica em geral como uma ferramenta poderosa na previsão da topologia óptima de estruturas bidimensionais e tridimensionais. No entanto, o método apresenta alguns problemas, tais como a necessidade de uma escolha cuidadosa dos parâmetros de optimização para uma boa convergência do algoritmo. Desta forma, deve ter-se uma escolha bastante criteriosa do coeficiente de controlo de perímetro  $r_{\min}$  e do coeficiente de penalização de densidades relativas intermédias  $p$  no processo de optimização.

De um modo geral, a resolução dos problemas considerando o constrangimento de perímetro combinado com a penalização das densidades relativas intermédias produz estruturas cuja topologia apresenta escassas áreas com densidade intermédia, que configuram uma topologia final aceitável. Desta forma o modelo aplicado a estruturas



bidimensionais e tridimensionais contribui para uma melhor identificação das suas configurações geométricas óptimas.

Atendendo a que, nos dias de hoje, existe uma maior exigência requerendo uma maior redução do tempo de projecto, produtos mais funcionais, mais eficientes, com maior qualidade e menor custo, o método de Optimização Topológica apresenta-se como um processo de extrema utilidade para ajudar a prever e analisar o comportamento de um produto mesmo antes do seu fabrico.

## Bibliografia

- [1] ABAQUS (2006), Version 6.6.
- [2] T. Ando Jr., F. Gomes, “Um Algoritmo de Restauração Inexata para a Otimização Topológica de Trelças”, *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, **7** (2006), 179-188.
- [3] M. Bahia, “Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Mecanismos Flexíveis”, *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.*
- [4] M. Bendsøe, O. Sigmund, “Topology Optimization: Theory, Methods and Applications”, *Second. Edition, Springer Verlag, Berlin, 2003.*
- [5] A. Andrade-Campos, “Modelação e Análise Numérica do Comportamento Mecânico e Térmico de Ligas de Alumínio”, *Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, 2005.*
- [6] P. Coelho, “Meta-Heurísticas Aplicadas em Optimização Estrutural”, *Trabalho de Síntese no âmbito das provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa, 2003.*
- [7] K. Coutinho, “Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais”, *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.*
- [8] J. Carvalho, “Metodologia de Optimização de Processos de Conformação Plástica”, *Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, 2007.*
- [9] P. Fernandes, “Optimização da Topologia de Estruturas Tridimensionais”, *Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1998.*

- [10] J. Folgado, “Modelos Computacionais para Análise e Projecto de Próteses Ortopédicas”, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2004.
- [11] D. Fujii, N. Kikuchi, “Improvement of Numerical Instabilities in Topology Optimization using the SLP Method”, *Struct Multidisc Optim* 19, 113-121, Springer-Verlag 2000.
- [12] A. Júnior, “Análise Comparativa de Métodos de Otimização Topológica em Elasticidade 2D e 3D”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- [13] J. Júnior, “Otimização Topológica com Refinos H-Adaptativos”, Tese de Doutoramento, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- [14] C. Lima, “Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de Otimização Topológica”, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- [15] T. Lippi, E. Silva, “Restrições de Manufatura Aplicadas a Otimização Topológica”, 2nd Workshop on Computational Approaches to Material Modelling and Optimisation – WCAMMO 2008, Joinville, 2008.
- [16] J. Madeira, “Optimização Multi-Objectivo da Topologia de Estruturas com Algoritmos Genéticos”, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2004.
- [17] J. Madeira, H. Rodrigues, “Implementação da Teoria da Homogeneização na Optimização de Estruturas Lineares e Elásticas”, VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional, Aveiro, 2000.
- [18] J. Madeira, H. Rodrigues, H. Pina, “Optimização Topológica Multi-Objectivo de Estruturas Via Algoritmos Genéticos”, VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade de Évora, 2003.

- [19] D. Mundstock, "Otimização de Forma Utilizando o Método dos Elementos de Contorno e Cálculo de Sensibilidade por Variáveis Complexas", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- [20] C. Pedersen, T. Buhl, "Topology Optimization", Site Internet: [www.topopt.dtu.dk/Theory1/](http://www.topopt.dtu.dk/Theory1/), Julho 2008.
- [21] F. Pizzirani, "Otimização Topológica de Estruturas Utilizando Algoritmos Genéticos", Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.
- [22] E. Porto, R. Pavanello, "Influência dos Parâmetros de Homogeneização sobre a Solução Estrutural Topológica Ótima", 8º Congresso Ibero-americano de Engenharia Mecânica, 2007.
- [23] O. Sigmund, "A 99 Line Topology Optimization Code Written in Matlab", Struct Multidisc Optim 21, 120-127, Springer-Verlag 2001.
- [24] M. Silva, "Aplicação do Método da Otimização Topológica para o Projecto de Mecanismos Flexíveis Menos Susceptíveis à Ocorrência de Dobradiças", Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- [25] M. Silveira, "Aproximação Inversa e Otimização Topológica Aplicados à Determinação de Leiaute de Tailored Blanks", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- [26] C. Souza, J. Fonseca, "A Two-Level Strategy for Topology and Orientation Optimization of Laminated Shell Structures", XIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF 2003.
- [27] F. Stump, "Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional sujeitas a Restrição de Tensão", Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

[28] F. Teixeira-Dias, “Mecânica Computacional – Uma Introdução aos Métodos Aproximados em Engenharia”, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, 2007.

[29] F. Teixeira-Dias, “Tensões Residuais de Origem Térmica em Materiais Compósitos de Matriz Metálica”, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1999.